

**Ein Verfahren zum Entwurf
dezentraler adaptiver Regelsysteme
nach der
Sektor - Stabilitätstheorie**

**DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor - Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr - Universität Bochum**

**von
Peter Wiemer
Oelde**

Bochum 1988





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543113_0025

**Ein Verfahren zum Entwurf
dezentraler adaptiver Regelsysteme
nach der
Sektor - Stabilitätstheorie**

**DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor - Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr - Universität Bochum**

**von
Peter Wiemer
Oelde**

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am : 10. November 1987

Tag der mündlichen Prüfung : 10. Februar 1988

Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Korreferent : Prof. Dr. s.c. techn. H. A. Nour-Eldin

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die wertvollen Anregungen und die großzügige Förderung während der Arbeit.

Herrn Prof. Dr. s.c. techn. H. A. Nour-Eldin gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichts.

Meinen Dank möchte ich auch allen Kollegen für die vielen Anregungen und die zahlreichen Diskussionen aussprechen. Ferner gilt mein Dank den Herren K. Krämer und M. Peis, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten ihren Teil zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Für die sorgfältige Anfertigung der Bilder danke ich Frau Schmücker und Frau Vollbrecht. Nicht zuletzt sei Frau Y.Y. Jung für die Unterstützung bei der Reinschrift des Manuskripts gedankt.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.	1
2. Der Grundregelkreis für die dezentrale Regelung einer Mehrgrößenregelstrecke mit unbekannten Parametern	
2.1 Der lineare Grundregelkreis	
2.1.1 Stationäre Genauigkeit	12
2.1.2 Der Entwurf des linearen Reglers für minimalphasige Regelstrecken	19
2.1.3 Der Entwurf des linearen Reglers für nichtminimalphasige Regelstrecken	22
2.2 Der adaptive Grundregelkreis	
2.2.1 Das Fehlermodell des adaptiven Regelkreises für minimalphasige Regelstrecken.	28
2.2.2 Das Fehlermodell des adaptiven Regelkreises für nichtminimalphasige Regelstrecken	37
3. Sektoreigenschaften verschiedener Adaptionsalgorithmen	
3.1 Standardalgorithmen mit übergreifender Parameteradaption	44
3.2 Adaptionsalgorithmen mit gewichteten Signalen	53
3.3 Adaptionsalgorithmen mit exponentiell gewichteten Signalen	62
4. Der Entwurf dezentraler adaptiver Regelsysteme nach der Sektor-Stabilitätstheorie	
4.1 Das Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung	71
4.2 Das Entwurfsverfahren.	86
4.3 Darstellung des Entwurfsverfahrens für eine Regelstrecke mit zwei Ein- und Ausgängen	100
5. Beispiele	
5.1 Simulation des adaptiven Regelkonzepts anhand des Modells eines Extruders	114
5.2 Experimentelle Erprobung des adaptiven Regelsystems an einem Turbogenerator	
5.2.1. Die Beschreibung der Regelstrecke.	125
5.2.2 Entwurf des Regelsystems und experimentelle Ergebnisse	131
6. Zusammenfassung und Ausblick	143

Anhang A	148
Anhang B	189
Literaturverzeichnis	191
Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen.	200

1. Einleitung

Für die Synthese linearer, zeitinvarianter Ein- und Mehrgrößensysteme stehen heute eine Vielzahl von Verfahren zur Verfügung, die in der Regel eine mathematische Beschreibung des zu untersuchenden Systems entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich voraussetzen. Bei der Anwendung dieser Verfahren an industriellen Anlagen ergibt sich jedoch häufig das Problem, daß zwar gute Kenntnisse über das statische Verhalten der Regelstrecke vorliegen, daß jedoch die dynamischen Eigenschaften der Anlage nur unzureichend bekannt sind. Bei vielen technischen Anlagen wird deshalb häufig zunächst bei der Inbetriebnahme des Regelsystems eine Grobeinstellung der Reglerparameter durchgeführt. Anschließend muß durch wiederholte Nachstellung der Reglerparameter versucht werden, das dynamische Verhalten des Regelkreises zu verbessern. Dies führt auch bei Standardprozessen zu einem beachtlichen Zeitaufwand und hohen Kosten. Damit eine manuelle Nachoptimierung der Reglereinstellwerte von einem Inbetriebnahmeingenieur noch mit vertretbarem Zeitaufwand durchgeführt werden kann, beschränken sich die in der Industrie verwendeten Regelalgorithmen meist auf ein Eingrößen-PID-Verhalten. Bei stark verkoppelten Mehrgrößensystemen ist es dann jedoch schwierig, eine zufriedenstellende Reglereinstellung zu finden.

In vielen Fällen hängt das dynamische Verhalten industrieller Regelstrecken von den äußeren Bedingungen, unter denen sie betrieben wird, ab. Eine Änderung z.B. der Auslastung der Anlage kann dann dazu führen, daß eine vorher ermittelte Reglereinstellung einen schlecht eingestellten oder sogar instabilen Regelkreis ergibt. Den Ausführungen von Singh (1981) zufolge sind die spektakulären Zusammenbrüche der Energieversorgungsnetze von Frankreich 1978 und New York einige Zeit vorher auf solche Ursachen zurückzuführen. Eine Möglichkeit, einerseits die Einstellung der Reglerparameter zu erleichtern und andererseits die Reglerparameter automatisch an geänderte Prozeßzustände anzupassen, besteht in dem Einsatz sogenannter *adaptiver* oder *selbsteinstellender* Regelsysteme. Solche Systeme sind in der Literatur seit etwa 1950 bekannt. Dem Grundregelkreis wird dabei ein meist nichtlineares Anpassungssystem überlagert, das die unbekannten oder zeitveränderlichen dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke erfaßt und den Regler im Sinne eines vorher gewählten Gütekriteriums automatisch anpaßt.



In den letzten Jahren wurden bei der theoretischen Behandlung adaptiver Systeme große Fortschritte erzielt. Für die adaptive Regelung von Ein- und Mehrgrößensystemen stehen heute die verschiedensten Verfahren zur Verfügung, die unter bestimmten idealen Voraussetzungen die globale Stabilität des geschlossenen Regelsystems gewährleisten. Eine Übersicht über die Entwicklung auf dem Gebiet der adaptiven Regelsysteme in den letzten Jahren geben die Arbeiten von Isermann (1982), Åström (1983b) und Unbehauen (1985a,c). Eine tiefergehende Einführung in dieses Gebiet der Regelungstechnik ist den Büchern von Landau (1979), Goodwin und Sin (1984) und Unbehauen (1985b) zu entnehmen. Während die ersten Jahre der Entwicklung adaptiver Regelsysteme vorwiegend von theoretischen Arbeiten bestimmt waren, wurden gerade in der letzten Zeit viele Arbeiten veröffentlicht, die sich besonders mit den praktischen Problemen bei der Implementierung adaptiver Regelalgorithmen an realen Anlagen beschäftigen. Adaptive Regelalgorithmen wurden sowohl an Laboranlagen als auch an industriellen Großanlagen mit Erfolg eingesetzt (Unbehauen und Schmid (1980), Narendra und Monopoli (1980), Unbehauen (1985a)). Durch eine verkürzte Inbetriebnahme ebenso wie durch eine wirtschaftlichere Fahrweise der einzelnen Prozesse, die durch die mit adaptiven Regelsystemen erreichbare höhere Regelgüte möglich wird, konnten zum Teil beachtliche Kosten für Personal und Energie eingespart werden (Krahl et al.(1985), Unbehauen und Wiemer (1986)).

Im Gegensatz zu den vielversprechenden Veröffentlichungen über den erfolgreichen Einsatz adaptiver Regelsysteme steht die Tatsache, daß auch heute noch weitgehend einfache PID-Regler in der Industrie zum Einsatz kommen. Dies liegt wohl vor allem daran, daß die heutigen adaptiven Regelsysteme noch von speziell ausgebildetem Personal implementiert werden müssen. Dieses Personal ist aber in der Regel nur in den Forschungsabteilungen der Industrie und an den Hochschulen anzutreffen. Erst in der letzten Zeit wurden von verschiedenen Herstellern kommerzielle adaptive Regelgeräte entwickelt und auf dem Markt angeboten (Andreiev (1981), Bengtsson und Egard (1984), Kofahl und Peter (1987)). Diese Geräte sind entweder als Kompaktregler oder als Teil eines Prozeßleitsystems erhältlich. Bis auf einige wenige Ausnahmen ist mit diesen Geräten lediglich die automatische Ermittlung von PID-Einstellwerten möglich. Zwar sind zur Zeit auch Entwicklungstendenzen hin zu anspruchsvolleren SISO-

Regelalgorithmen zu erkennen, doch ist im Moment nicht abzusehen, zu welchen Zeitpunkt auch adaptive Mehrgrößenregler kommerziell erhältlich sein werden.

In vielen Fällen sind in technischen Großanlagen der Industrie die zu regelnden Ausgangsgrößen mehr oder weniger stark untereinander verkoppelt. Werden die konventionellen PID-Regler der einzelnen Regelkreise durch moderne adaptive Regelgeräte ersetzt, so ergibt sich eine typische dezentrale adaptive Regelungsstruktur. Dezentrale Regelungen sind in der Literatur vorwiegend aus dem Bereich der linearen Syntheseverfahren für große Systeme mit komplexer Struktur bekannt. Da dort der Begriff dezentral in verschiedenen Zusammenhängen benutzt wird, soll zunächst eine Definition dieses Begriffes, wie er in dieser Arbeit verwendet wird, erfolgen.

Definition: dezentral geregeltes System (Litz,1983)

Betrachtet wird eine Regelstrecke, die aus mehreren verkoppelten Teilsystemen besteht. Jedem Teilsystem r ist eine bestimmte Anzahl der Ausgangsgrößen, die in dem Vektor $\underline{y}^r(k)$ zusammengefaßt sind, zugeordnet und jedes Teilsystem r ist nur durch eine Gruppe eigener Eingangsgrößen $\underline{u}^r(k)$ von außen beeinflussbar. Weiterhin wird jedem Teilsystem ein eigener Regler r zugeordnet. Werden in dem Regler r die Stellgrößen für das Teilsystem r ausschließlich aus den Meßgrößen desselben Teilsystems gebildet, so wird das Gesamtsystem als *dezentral geregeltes System* bezeichnet.

Diese Definition setzt voraus, daß zwischen den einzelnen Reglern keinerlei Informationsaustausch stattfindet. Die einzelnen Regler werden dann auch als *lokale Regler*, die Signale $\underline{u}^r(k)$ und $\underline{y}^r(k)$ als *lokale Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen* bezeichnet.

Die Realisierung eines Regelsystems als dezentral geregeltes System besitzt gegenüber der zentralen Regelung verschiedene Vorteile. Durch die Aufspaltung des Gesamtsystems in mehrere Teilsysteme ergibt sich bei großen Systemen mit komplexer Struktur auf der lokalen Ebene ein überschaubarer Prozeß, für den in vielen Fällen auch ohne aufwendige Hilfsmittel eine zufriedenstellende Reglereinstellung ermittelt werden kann. Außerdem besitzt die Dezentralisierung an sich von Standpunkt der Prozeßleittechnik aus gesehen eine Reihe von Realisierungsvorteilen. Dezentrale Systeme weisen eine höhere Sicherheit gegenüber Störungen und Ausfällen einzelner Komponenten auf und ein

aufwendiges Informationssystem für den Datenaustausch entfällt. Eine Optimierung der einzelnen Teilsysteme ergibt jedoch keine optimale Gesamtlösung und die Stabilität des Gesamtsystems ist nur dann gewährleistet, wenn sie beim Entwurf jedes Teilreglers berücksichtigt wird.

Bei dezentralen adaptiven Regelsystemen war das Stabilitätsproblem des Gesamtsystems lange Zeit ungeklärt. Die Kopplungen der einzelnen Regelkreise wurden in einer frühen Arbeit über den Einsatz dezentraler adaptiver Regler für die Frequenz-Leistungs-Regelung von elektrischen Verbundnetzen (Hamza, Agathoklis und Chan, 1982) deshalb als eine stochastische Störung modelliert. Wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch gezeigt wird, führt dieser Ansatz auf ein instabiles Gesamtsystems, wenn die Kopplungen der Regelstrecke zu stark sind. Als eine der ersten Arbeiten auf den Gebiet der adaptiven dezentralen Regelung kann das von Davison (1978) vorgestellte Verfahren für den sequentiellen Entwurf dezentraler Regler für Mehrgrößensysteme mit unbekannten Parametern angesehen werden. In der Arbeit wird ein Algorithmus vorgestellt, der es ermöglicht, die Einstellwerte jedes einzelnen Reglers eines dezentralen Regelsystems im geschlossenen Regelkreis im laufenden Betrieb, d.h. on-line, zu ermitteln. Da die Modifikation der Reglerparameter noch vom Anwender durchgeführt werden muß, handelt es sich streng genommen nicht um einen adaptiven Regelalgorithmus. Außerdem ist zur Ermittlung der Reglerparameter ein Informationsaustausch zwischen den lokalen Reglern notwendig. Echte dezentrale adaptive Regelsysteme wurden mit Ausnahme der Arbeit von Sundareshan (1976) erst in den letzten 5 Jahren in der Literatur vorgestellt. In Tabelle 1 sind die meisten Veröffentlichungen auf diesem Gebiet zusammenfassend dargestellt. Der Vollständigkeit halber wurden auch 2 Arbeiten aufgenommen, bei denen es sich im Sinne der vorangegangenen Definition nicht um rein dezentrale Systeme handelt, da ein Informationsaustausch zwischen den lokalen Reglern stattfindet.

Die meisten Arbeiten befassen sich mit *direkten* adaptiven Regelsystemen. Dies sind Regelsysteme, in denen direkt mit Hilfe meßbarer Signale der Regler so eingestellt wird, daß sich ein gewünschtes Verhalten des geschlossenen Regelkreises ergibt. Bei den *indirekten* Verfahren wird zunächst ein Modell der Regelstrecke ermittelt und anschließend mit Hilfe der identifizierten Streckenparameter der dezentrale Regler be-

		Struktur des Regel- systems			Regler	Regel- strecke	Stabili- tts- beweis	Adaption Identi- fikation	An- wen- dung
1976	Sundareshan	K	DO	DA	MR	NB	J	FG	T
1982	Friedlander, Porat	D	DO	IB	LZ	NB	N	FG	T
	Hmamed, Radouane	K	DO	DA	LZ	NB	J	AD	S
1983	Ioannou	K	DO	DA	MR	NB	J	FG	T
	Ioanonou,Kokotovic	K	DO	DA	MR	NB	J	FG	T
1984	Ioannou, de Ponte	K	DO	DA	MR	BE	J	FG	S
1985	Amin, Womack	K	DO	DA	MR	NB	J	FG	T
	Bundell	D	DO	DA	MR	NB	J	FG	E
	Gavel, Siljak a)	K	DO	DA	HG	BE	J	FG	T
	Gavel, Siljak b)	K	DO	DA	MR	BE	J	FG	S
	Isermann, Hensel	D	DO	IB	PID/LZ	NB	N	RLS	S
	Lyou, Bien	D	DO	DA	LZ	BE	J	FG	S
	Yang	D	DO	DA	MR	BE	J	FG	T
1986	Benhammou, Titli	D	DI	DA	MR	BE	J	FG	T
		D	DI	IB	MR	BE	N	FG	T
	Chen, Titli	D	DO	DA	MR	NB	N	FG	S
	Hsu et al.	K	DI	E	PID	NB	N	KE	S
	Tzafestas et al.	D	DO	IB	PID	NB	N	AD	S

Struktur des Regelsystems:

Systembeschreibung

- Kkontinuierlich
- Ddiskret

Reglerstruktur

DO	dezentral geregeltes System ohne Informationsaustausch
DI	dezentral geregeltes System mit Informationsaustausch

Adaptionsverfahren

DA	direkte Anpassung der Reglerparameter
IB	Identifikation der Streckenparameter mit anschließender Berechnung des Reglers
E	Ermittlung der Reglerparameter aus Kennwerten im Zeit- oder Frequenzbereich

Regler:

MR	Regler nach dem Modellvergleichsverfahren
LZ	lokale Zustandsrückführung
PID	PID-Regler
HG	P-Regler mit großer Verstärkung ("high gain" Technik)

Regelstrecke:

BE	Regelstrecke muß zur Realisierung des Stellgesetzes oder Adaptionsgesetzes (teilweise) bekannt sein
NB	Regelstrecke muß nicht bekannt sein

Stabilität:

J	Stabilität unter gewissen Bedingungen gewährleistet
N	kein Stabilitätsbeweis

Adaptions/Identifikation:

FG	einfache Adaptionsgesetze mit konstanter Verstärkung (fixed gain)
RLS	rekursive least-squares Parameterschätzung
AD	andere Adaptionsgesetze
KE	Kennwertermittlung

Anwendungen:

T	rein theoretische Arbeit
S	Simulationsbeispiel
E	Echtzeitimplementierung

Tabelle 1: Zusammenstellung der Veröffentlichungen über dezentrale adaptive Regelsysteme

rechnet. Eine Ausnahme bildet das Verfahren von Hsu, Chan und Kaszkurewicz (1986). Die Ermittlung der Einstellwerte eines PID-Reglers aus Kennwerten im Zeitbereich wird nur einmal während der Inbetriebnahme durchgeführt. Neben den einfachen P- oder PID-Reglern werden vor allem Zustandsregler und dynamische Regler, die nach dem Modellvergleichsverfahren entworfen werden, eingesetzt. Diese Regler bieten den Vorteil, daß unter gewissen Voraussetzungen die Stabilität des adaptiven Regelsystems gewährleistet werden kann.

Bis jetzt kann das Problem der dezentralen adaptiven Regelung von beliebigen Mehrgrößensystemen mit unbekannten Parametern jedoch nicht als zufriedenstellend gelöst betrachtet werden. Eine genaue Analyse der einzelnen Verfahren ergibt, daß in vielen Fällen die Regelstrecke teilweise bekannt sein muß, da Parameter der Regelstrecke im Stellgesetz oder Adaptionsgesetz verwendet werden. Außerdem wird meistens eine Darstellung der Regelstrecke als teilsystemorientiertes Zustandsraummodell

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_{ii} u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(t) \quad (1.1)$$

$$y_i(t) = C_{ii} x_i(t) \quad (1.2)$$

oder

$$x_i(k+1) = A_{ii} x_i(k) + B_{ii} u_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(k) \quad (1.3)$$

$$y_i(k) = C_{ii} x_i(k) \quad (1.4)$$

vorausgesetzt, wobei die Zustandsvektoren $x_j(t,k)$ ($j = 1, \dots, N$ und $j \neq i$) die übrigen mit dem Teilsystem i gekoppelten Teilsysteme beschreiben. Dann ist das Verfahren jedoch nicht für beliebige Mehrgrößenregelstrecken einsetzbar. Einen weiteren Nachteil der bis jetzt vorgestellten Verfahren stellt die fast ausschließliche Verwendung sogenannten einfacher, meist integraler Adaptionsgesetze mit konstanter Verstärkung ("fixed gain"-Algorithmen) dar. Bis auf eine Ausnahme werden die wesentlich leistungsfähigeren Adaptionsgesetze nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ("least-squares"-Algorithmen) nicht eingesetzt. Daraus ergeben sich an ein Verfahren für die adaptive dezentrale Regelung von Mehrgrößensystemen folgende Anforderungen :

- das Verfahren muß für beliebige Regelstreckentypen einsetzbar sein,
- eine Implementierung des Verfahrens muß ohne die Kenntnis einzelner Parameter der Regelstrecke möglich sein,
- unter bestimmten Voraussetzungen muß die Stabilität des gesamten adaptiven Regelsystems sichergestellt sein und
- die verwendeten Adaptionsgesetze sollen eine schnelle Konvergenz der Reglerparameter gewährleisten.

Bei vielen praktischen Anwendungen ist die Struktur der Regelstrecke nicht bekannt und interne Zustandsgrößen sind nicht meßbar. Deshalb wird in dieser Arbeit ein Verfahren vorgestellt, bei dem ausschließlich meßbare Eingangs- und Ausgangssignale der Regelstrecke verwendet werden. Zur Stabilitätsanalyse des adaptiven Regelkreises können dann funktionalanalytische Methoden, die eine Eingangs-/ Ausgangsbeschreibung der einzelnen Übertragungssysteme im adaptiven Regelkreis durch Operatoren voraussetzen, herangezogen werden. Diese Methoden sind in der Literatur aus der Theorie nichtlinearer Regelsysteme bekannt (Desoer und Vidyasagar (1975), Willems (1971), Böcker, Hartmann und Zwanzig (1980)). Ein sehr leistungsfähiges Theorem zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme stellt das Sektor-Stabilitätstheorem dar. Es wurde erstmals von Zames (1966) für Eingrößensysteme vorgestellt und später von Safonov (1980) auf Mehrgrößensysteme erweitert. Durch die funktionalanalytische Beschreibung der einzelnen Systemkomponenten mittels Operatoren ist eine qualitative Aussage über das Verhalten des geschlossenen Regelkreises möglich, ohne daß die interne Struktur der einzelnen Übertragungssysteme bekannt sein muß. So wurden von Safonov mit Hilfe des Sektor-Stabilitätstheorems Bedingungen für den Entwurf *robuster* Mehrgrößenregelungen für Regelstrecken mit unbekannter Struktur angegeben.

Auch auf dem Gebiet der adaptiven Regelung hat das Interesse an der Robustheit der adaptiven Regelalgorithmen gegenüber Modellunsicherheiten in der letzten Zeit stark zugenommen. Untersuchungen haben ergeben, daß bereits einfache adaptive Regelkreise instabil werden können, wenn die Ordnung der Regelstrecke zu niedrig abgeschätzt wird (Rohrs, Valavani, Athans und Stein (1982), Ioannou und Kokotovic (1982), Åström (1983a)) oder wenn Störungen auf die Regelstrecke einwirken, die beim Ent-

wurf des Reglers nicht berücksichtigt wurden. Dieses Phänomen tritt auch dann auf, wenn als Anfangswert für die Adaption der Reglerparameter eine Reglereinstellung gewählt wird, bei der das gewünschte dynamische Verhalten des geschlossenen adaptiven Regelkreises schon sehr gut erreicht wird. Unter dem Überbegriff *robuste adaptive Regelung* werden deshalb in der Literatur verschiedene Verfahrenen diskutiert, in denen eine Abweichung der tatsächlichen Struktur der Regelstrecke von dem für den Reglerentwurf verwendeten Modell berücksichtigt wird. Eine Übereinstimmung zwischen der tatsächlichen Struktur der Regelstrecke und der Modellstruktur ist in der Praxis nur sehr selten gegeben, da kaum technische Prozesse existieren, die vollkommen linear und von bestimmter Ordnung sind. Dieses Problem kann generell auch durch eine Erhöhung der Modellordnung nicht umgangen werden. Da das Modell jedes dynamischen Systems per Definition nicht mit dem tatsächlichen System selbst übereinstimmt, sind nichtmodellerte dynamische Anteile immer vorhanden (Kosut und Friedlander (1982)). Deshalb kommen Rohrs et al. (1982) zu dem Schluß, daß adaptive Regelsysteme für eine praktische Anwendung unbrauchbar sind. In der Zwischenzeit wurden verschiedene Verfahren entwickelt, die robust gegenüber Ausgangsstörungen (Peterson und Narendra (1982), Hahn (1983), Kreisselmeier und Narendra (1982), Ioannou (1983)) oder Unsicherheiten in der Struktur der Regelstrecke (Egardt (1979), Balas und Johnson (1981), Kosut, Johnson und Anderson (1983), Praly (1983a,b, 1984), Ioannou und Kokotovic (1984a,b), Kosut und Johnson (1984), Ortega, Praly und Landau (1985)) sind. Eine gute Zusammenfassung der verschiedenen Methoden und Verfahren enthält die Arbeit von Ortega und Yu (1987). Aus ihr geht hervor, daß in der Hauptsache Eingrößensysteme untersucht wurden. Lediglich für kontinuierliche Regelsysteme wurden von Kosut und Friedlander (1985) Stabilitätsbedingungen für adaptive Mehrgrößenregelungen mit strukturunsicheren Regelstrecken angegeben.

Bis jetzt wurden nur unbeabsichtigte Fehler in der Modellierung der Regelstrecke, die durch die Modellunsicherheiten verursacht werden, betrachtet. Die Verfahren sind jedoch auch dann anwendbar, wenn die Regelalgorithmen absichtlich auf der Grundlage reduzierter Streckenmodelle entworfen werden. Dies ist zum Beispiel für die adaptive Regelung von großen Systemen mit komplexer Struktur sinnvoll. Die dezentrale adaptive Regelung kann dann als ein Spezialfall der robusten adaptiven Regelung aufgefaßt werden. Durch die Nichtberücksichtigung aller Kopplungen der Regelstrecke geht der

Entwurf des adaptiven Mehrgrößenreglers in den Entwurf von mehreren dezentralen Eingrößenreglern über. Theoretisch können deshalb sowohl robuste als auch dezentrale adaptive Regelungen mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln behandelt werden. Wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch gezeigt wird, ist zur Stabilitätsanalyse des adaptiven Regelkreises jedoch ein Modell der Regelstrecke notwendig. Die Stabilität des dezentralen adaptiven Regelkreises kann dann mit Hilfe eines groben Modells der Regelstrecke abgeschätzt werden. Da bei der Analyse robuster adaptiver Regelsysteme unbeabsichtigte Fehler in der Modellierung untersucht werden, steht in diesem Fall kein Modell der tatsächlichen Regelstrecke zur Verfügung.

Moderne adaptive Regelalgorithmen weisen in der Regel eine hochgradig nichtlineare Struktur auf. Sie lassen sich aber einfach auf modernen digitalen Prozeßrechnern realisieren. Für diskrete SISO-Systeme wurden Untersuchungen über die Robustheit der verwendeten Adaptionalgorithmen gegenüber Modellunsicherheiten unter anderem von Ortega und Landau (1983a,b) durch Anwendung des Sektorstabilitätstheorems von Safonov (1980) durchgeführt. Ebenso wie in den ersten Arbeiten von Gawthrop (1980) und Gawthrop und Lim (1982), in denen das Sektor-Stabilitätstheorem erstmals zur Stabilitätsanalyse adaptiver Regelsysteme verwendet wurde, war eine Stabilitätsaussage nur möglich, wenn von vornherein die Eingangs- und Ausgangssignale der Regelstrecke als beschränkt vorausgesetzt wurden. Erst durch die Einführung der sogenannten *Signalnormierung*, bei der alle in das Adaptionsgesetz eingehenden Signale mit einem speziellen, rekursiv berechneten Gewichtungsfaktor multipliziert werden, konnte das Problem von Ortega, Praly und Landau (1985) gelöst werden. Allerdings sind die Ergebnisse dieser Arbeit noch nicht vollständig zufriedenstellend, da in der Ableitung der Sektoreigenschaften des Adaptionsgesetzes noch Unstimmigkeiten auftreten (Cluett, Shah und Fischer (1987)). Außerdem wurde später von Cluett, Shah und Fisher (1986) gezeigt, daß anstelle des Stabilitätstheorems von Safonov ein modifiziertes Sektor-Stabilitätstheorem verwendet werden muß, in dem auch Anfangsbedingungen des Adaptionsgesetzes berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit wird das Verfahren von Ortega, Praly und Landau (1985) zur Stabilitätsanalyse robuster adaptiver Regelsysteme erstmals auf Mehrgrößensysteme erweitert. Die funktionalanalytischen Grundlagen zur Stabilitätsanalyse von Regelkreisen und die

Erweiterung des modifizierten Sektor-Stabilitätstheorems von Cluett, Shah und Fisher auf Mehrgrößensysteme werden im Anhang ausführlich dargestellt. Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 wird die Grundstruktur des linearen dezentralen Regelkreises dargestellt. Für minimalphasige und nichtminimalphasige Regelstrecken werden unterschiedliche Reglerstrukturen abgeleitet, aus denen im zweiten Teil von Kapitel 2 das Fehlermodell des adaptiven dezentralen Regelsystems entwickelt wird. Zur Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Sektor-Stabilitätstheorems werden Sektoreigenschaften der einzelnen Komponenten des Fehlermodells benötigt. Im Kapitel 3 werden deshalb die Sektoreigenschaften verschiedener Adaptionalgorithmen untersucht. Das Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung im Kapitel 4 gibt Bedingungen für die globale asymptotische L_∞ -Stabilität bzw. die asymptotische L_∞ -Stabilität im Kleinen an. Im zweiten Abschnitt von Kapitel 4 werden dann ausführliche Hinweise für die Anwendung des Theorems auf praktische Beispiele gegeben. Kapitel 5 demonstriert die erfolgreiche Anwendung auf das Modell eines Extruders und die praktische Erprobung an einem Turbogeneratorsatz.

2. Der Grundregelkreis für die dezentrale Regelung einer Mehrgrößenregelstrecke mit unbekannten Parametern

2.1 Der lineare Grundregelkreis

2.1.1 Stationäre Genauigkeit

Eine lineare zeitinvariante Regelstrecke mit q Ein- und q Ausgängen kann im Frequenzbereich durch die $q \times q$ Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{B'_{11}(z)}{A'_{11}(z)} z^{-d_{11}} & \dots & \frac{B'_{1q}(z)}{A'_{1q}(z)} z^{-d_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{B'_{q1}(z)}{A'_{q1}(z)} z^{-d_{q1}} & \dots & \frac{B'_{qq}(z)}{A'_{qq}(z)} z^{-d_{qq}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$= \left\{ \frac{B'_{ij}(z)}{A'_{ij}(z)} z^{-d_{ij}} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, q$$

$$B'_{ij}(z) = b_{ij0} + b_{ij1} z^{-1} + \dots + b_{ijn} b_{ij} z^{-n_{bij}}, \quad b_{ij0} \neq 0$$

$$A'_{ij}(z) = 1 + a_{ij1} z^{-1} + \dots + a_{ijn} a_{ij} z^{-n_{aij}},$$

in P-kanonischer Form beschrieben werden. Der Entwurf des linearen Grundregelkreises setzt eine Darstellung der Regelstrecke als Polynommatrizenbruch voraus, z.B.

$$\underline{G}(z) = \underline{B}'(z) \underline{A}'(z)^{-1}. \quad (2.2)$$

Dazu wird die Matrix $\underline{G}(z)$ pro Spalte auf den jeweiligen (Spalten-) Hauptnenner

$$A_i(z) = \text{kgV}_{1 \leq i \leq q} \left\{ A'_{ij}(z) \right\} \quad ; \quad j = 1, \dots, q \quad (2.3)$$

gebracht und die Zählerpolynome werden entsprechend erweitert

$$B''_{ij}(z) = B'_{ij}(z) \frac{A_j(z)}{A'_{ij}(z)} \quad (2.4)$$

$B''_{ij}(z)$ stellt ein Polynom dar, da der Faktor $A_j(z)/A'_{ij}(z)$ ohne Rest teilbar ist. Faßt man die Spaltenhauptnenner $A'_i(z)$ zu einer diagonalen Polynommatrix $\underline{A}(z)$ zusammen

$$\underline{A}(z) = \text{diag} \left\{ A'_i(z) \right\}; \quad i = 1, \dots, q \quad (2.5)$$

und bildet aus den erweiterten Zählerpolynomen die vollbesetzte Matrix $\underline{B}''(z)$

$$\underline{B}''(z) = \left\{ B''_{ij}(z) z^{-d_{ij}} \right\}; \quad i, j = 1, \dots, q, \quad (2.6)$$

so läßt sich die Regelstrecke nach Gl.(2.1) auch in der Form

$$\underline{G}(z) = \underline{B}''(z) \underline{A}(z)^{-1} \quad (2.7)$$

angeben. Für das weitere Vorgehen ist es sinnvoll, die Totzeiten auf der Hauptdiagonalen von $\underline{B}''(z)$ zu einer diagonalen Matrix $\underline{D}_a(z)$ zusammenzufassen

$$\underline{D}_a(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_{ii}} \right\}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (2.8)$$

Dann gilt

$$\underline{G}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \quad (2.9)$$

mit

$$\underline{B}(z) = \left\{ B''_{ij}(z) z^{d_{ii}-d_{ij}} \right\}. \quad (2.10)$$

Gl.(2.9) beschreibt die Regelstrecke durch einen rechten Polynommatrizenbruch. Aus der Bedingung $b_{ij0} \neq 0$ in Gl.(2.1) folgt aus Gl.(2.10) unter der Bedingung

$$d_{ij} \geq d_{ii} \quad (2.11)$$

die Aussage

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{B}(z) \neq 0. \quad (2.12)$$

Eine Matrix, die die Gleichung (2.12) erfüllt, wird auch bikausal (Dion und Lamare, 1984) genannt. $\underline{B}(z)$ ist aufgrund von Gl.(2.12) invertierbar.

Ist Gl.(2.11) nicht erfüllt, so kann die Matrix $\underline{B}''(z)$ nach Gl.(2.6) ebenfalls in ein Produkt aus 2 Matrizen zerlegt werden (Dion und Lamare, 1984)

$$\underline{G}(z) = \underline{D}_h(z) \underline{B}(z) \underline{A}(z)^{-1} \quad (2.13a)$$

mit

$$\underline{D}_h(z) = \begin{bmatrix} z^{-d_{mi}} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ h_{ij}(z) & & z^{-d_{mq}} \end{bmatrix} \quad (2.13b)$$

$$h_{ij}(z) = \frac{h}{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{m_{ij}} z^{-m_{ij}}}, \quad m_{ij} < d_{mi} \quad (2.13c)$$

Die Matrix $\underline{D}_h(z)$ wird auch als *Interactor* (Elliott und Wolovich, 1984) bezeichnet. Wie im weiteren noch gezeigt wird, ist es für den Entwurf dezentraler adaptiver Regelungen notwendig, daß die Matrix $\underline{D}_h(z)$ eine diagonale Struktur besitzt. Um das Entwurfsverfahren auch dann anwenden zu können, wenn Gl.(2.11) nicht erfüllt ist, wird ein diagonales Vorfilter $\underline{D}_v(z)$

$$\underline{D}_v(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_{vi}} \right\}, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.14)$$

vor die Regelstrecke geschaltet. Von Narendra und Singh (1983) wurde ein Verfahren angegeben, das es ermöglicht, ein Vorfilter $\underline{D}_v(z)$ zu berechnen, so daß die Matrix $\underline{B}^*(z)$ in der Gleichung

$$\underline{G}(z) \underline{D}_v(z) = \underline{D}_a^*(z) \underline{B}^*(z) \underline{A}(z)^{-1} \quad (2.15)$$

die Bedingung nach Gl.(2.12) erfüllt. $\underline{D}_a^*(z)$ ist eine diagonale Matrix, die nur Verzögerungselemente $z^{-d_{ij}}$ enthält. Da die Matrizen $\underline{D}_a^*(z)$ und $\underline{B}^*(z)$ in Gl.(2.15) die gleiche Struktur wie die Matrizen $\underline{D}_a(z)$ und $\underline{B}(z)$ in Gl.(2.9) aufweisen, wird im folgenden die Beschreibung nach Gl.(2.9) für die Regelstrecke verwendet. Sollte im Einzelfall

Gl.(2.12) nicht erfüllt sein, so wird davon ausgegangen, daß Gl.(2.9) die um das Vorfilter erweiterte Regelstrecke beschreibt.

Werden die z-Transformierten der Regelgrößen zu einem $q \times 1$ Vektor $\underline{Y}(z)$ und die z-Transformierten der Stellgrößen zu einem $q \times 1$ Vektor $\underline{U}(z)$ zusammengefaßt, so wird das Übertragungsverhalten der Regelstrecke durch die Gleichung

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{U}(z) \quad (2.16)$$

$$\underline{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) & \dots & Y_i(z) & \dots & Y_q(z) \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) & \dots & U_i(z) & \dots & U_q(z) \end{bmatrix}^T$$

beschrieben.

Gl.(2.16) gilt für Regelstrecken ohne Störungen. Für gestörte Regelstrecken wird ein Störvektor $\underline{Z}(z)$ definiert

$$\underline{Z}(z) = \underline{C}_d(z) \underline{\epsilon}(z) + \underline{Z}_d(z), \quad (2.17a)$$

wobei $\underline{Z}_d(z)$ die deterministischen und $\underline{\epsilon}(z)$ die stochastischen Störkomponenten enthält. Das gesamte dynamische Verhalten der Regelstrecke ist dann durch

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}^{-1}(z) \underline{U}(z) + \underline{Z}(z) \quad (2.17b)$$

gegeben.

Die Regelstrecke soll nach Bild 2.1 durch n lineare dezentrale Ein- oder Mehrgrößenregler stabilisiert werden. Das Stellgesetz für jeden dezentralen Regler lautet allgemein

$$\underline{U}^r(z) = \underline{P}^r(z)^{-1} \left[\underline{T}^r(z) \underline{W}^r(z) - \underline{S}^r(z) \underline{Y}^r(z) \right]; \quad r = 1, \dots, n \quad (2.18a)$$

mit

$$\underline{U}^r(z) = \begin{bmatrix} U_1^r(z) & \dots & U_i^r(z) & \dots & U_{q_r}^r(z) \end{bmatrix}^T \quad (2.18b)$$

$$\underline{Y}^r(z) = \begin{bmatrix} Y_1^r(z) & \dots & Y_i^r(z) & \dots & Y_{q_r}^r(z) \end{bmatrix}^T \quad (2.18c)$$

$$\underline{W}^r(z) = \begin{bmatrix} W_1^r(z) & \dots & W_i^r(z) & \dots & W_{q_r}^r(z) \end{bmatrix}^T \quad (2.18d)$$

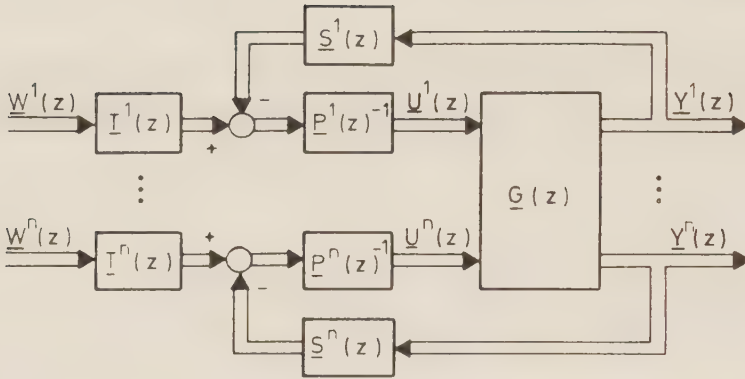


Bild 2.1 Die Grundstruktur des linearen Regelsystems

und

$$\underline{P}^r(z) = \left\{ P_{ij}^r(z) \right\} \quad , \quad i, j = 1, \dots, q^r \quad (2.18e)$$

$$\underline{T}^r(z) = \text{diag} \left\{ T_i^r(z) \right\} \quad , \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.18f)$$

$$\underline{S}^r(z) = \text{diag} \left\{ S_i^r(z) \right\} \quad , \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.18g)$$

Die Polynome $P_{ij}^r(z)$, $T_i^r(z)$ und $S_i^r(z)$ in Gl.(2.18e-g) sind durch die Beziehungen

$$P_{ij}^{r,r}(z) = \sum_{k=0}^{n_{p,ij}^r} p_{ij,k} z^{-k} \quad , \quad i, j = 1, \dots, q^r \quad (2.18h)$$

$$T_i^{r,r}(z) = \sum_{k=0}^{n_{t,i}^r} t_{i,k} z^{-k} \quad , \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.18i)$$

$$S_i^{r,r}(z) = \sum_{k=0}^{n_{s,i}^r} s_{i,k} z^{-k} \quad , \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.18j)$$

bestimmt. Jeder der n Einzelregler beeinflusst q^r Stellgrößen und wird von q^r gemessenen Ausgangssignalen der Regelstrecke angesteuert. Damit gilt

$$\sum_{r=1}^n q^r = q ,$$

wobei q die Gesamtanzahl der Ein- bzw. Ausgänge beschreibt. Gl.(2.18a) kann auch als erweiterte Vektorgleichung geschrieben werden

$$\underline{U}(z) = \underline{P}(z)^{-1} \left[\underline{I}(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right] \quad (2.19a)$$

mit

$$\underline{U}(z) = \left[\underline{U}^1(z)^T \dots \underline{U}^r(z)^T \dots \underline{U}^n(z)^T \right]^T \quad (2.19b)$$

$$\underline{Y}(z) = \left[\underline{Y}^1(z)^T \dots \underline{Y}^r(z)^T \dots \underline{Y}^n(z)^T \right]^T \quad (2.19c)$$

$$\underline{W}(z) = \left[\underline{W}^1(z)^T \dots \underline{W}^r(z)^T \dots \underline{W}^n(z)^T \right]^T \quad (2.19d)$$

und

$$\underline{P}(z) = \text{diag} \left\{ \underline{P}^r(z) \right\} , \quad r = 1, \dots, n \quad (2.19e)$$

$$\underline{I}(z) = \text{diag} \left\{ \underline{I}^r(z) \right\} , \quad r = 1, \dots, n \quad (2.19f)$$

$$\underline{S}(z) = \text{diag} \left\{ \underline{S}^r(z) \right\} , \quad r = 1, \dots, n . \quad (2.19g)$$

Das Ausgangssignal $\underline{Y}(z)$ des geschlossenen Regelsystems lautet dann

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}(z)^{-1} \underline{P}(z)^{-1} \left[\underline{I}(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right] + \underline{Z}(z) \quad (2.20a)$$

oder nach entsprechender Umformung

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) &= \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{A}(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right]^{-1} \\ &\quad \left[\underline{I}(z) \underline{W}(z) + \underline{P}(z) \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z) \right] . \end{aligned} \quad (2.20b)$$

Der Regler nach Gl.(2.19a-g) ist im allgemeinen Fall nicht stationär genau. Für sprungförmige Sollwertänderungen und deterministische Störungen, die die Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{w}(k) = \underline{w}_0 = \text{const} \quad (2.21a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{z}(k) = \underline{z}_0 = \text{const} \quad (2.21b)$$

erfüllen, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \underline{B}(1) \left[\underline{P}(1) \underline{A}(1) + \underline{S}(1) \underline{B}(1) \right]^{-1} \underline{T}(1) \underline{w}_0 + \left[\underline{I} + \underline{B}(1) \underline{A}(1)^{-1} \underline{P}(1)^{-1} \underline{S}(1) \right]^{-1} \underline{z}_0. \quad (2.22)$$

Stationäre Genauigkeit kann für konstante Streckenparameter durch die Wahl des Vorfilters $\underline{T}(1)$ erreicht werden. Bei unbekannten Streckenparametern und für die Ausregelung von deterministischen Störungen ist es sinnvoll, einen zusätzlichen Integrator einzubauen. Das Stellgesetz lautet dann

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^g} \underline{P}(z)^{-1} \left[\underline{T}(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right], \quad g = (0,1). \quad (2.23)$$

Aus der Beziehung für das Ausgangssignal des geschlossenen Regelsystems

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \left[\underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{A}(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right]^{-1} \left[\underline{T}(z) \underline{W}(z) + \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z) \right] \quad (2.24)$$

ergibt sich mit Gl.(2.21) die Bedingung für stationäre Genauigkeit

$$\underline{T}(1) = \underline{S}(1). \quad (2.25)$$

Damit kann das Vorfilter unabhängig von den unbekannten Streckenparametern ausgelegt werden.

Für den Entwurf der Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ ist es sinnvoll, den zusätzlichen Integrator als Teil der Regelstrecke aufzufassen. Gl.(2.17b) lautet dann

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) &= \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}_I(z)^{-1} \underline{U}_I(z) + \underline{Z}(z) \\ &= \underline{G}_I(z) \underline{U}_I(z) + \underline{Z}(z) \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit

$$\underline{A}_I(z) = (1 - z^{-1})^g \underline{A}(z), \quad g = (0,1) \quad (2.27a)$$

und

$$\underline{U}_I(z) = (1 - z^{-1})^g \underline{U}(z), \quad g = (0,1). \quad (2.27b)$$

2.1.2 Der Entwurf des linearen Reglers für minimalphasige Regelstrecken

Bis jetzt wurde keine Bedingung für die Auslegung der Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$ angegeben. Im folgenden soll ein linearer dezentraler Regler so entworfen werden, daß die Ausgangsgrößen $\underline{Y}(z)$ der Regelstrecke einem vorgegebenen idealen Ausgangsverhalten $\underline{Y}_m(z)$ möglichst exakt folgen und zusätzlich deterministische Störungen, die die Gl.(2.21b) erfüllen, asymptotisch ausgeregelt werden. Das ideale Ausgangsverhalten $\underline{Y}_m(z)$ der Regelstrecke wird dabei durch das Parallelmodell $\underline{G}_m(z)$

$$\underline{G}_m(z) = \underline{D}_m(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{B}_m(z) \quad (2.28a)$$

mit

$$\underline{D}_m(z) = \text{diag} \left\{ \underline{D}_m^r(z) \right\}, \quad r = 1, \dots, n \quad (2.28b)$$

$$\underline{D}_m^r(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_{mi}} \right\}, \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.28c)$$

$$\underline{A}_m(z) = \text{diag} \left\{ \underline{A}_m^r(z) \right\}, \quad r = 1, \dots, n \quad (2.28d)$$

$$\underline{A}_m^r(z) = \text{diag} \left\{ \underline{A}_{mi}(z) \right\}, \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.28e)$$

$$\underline{B}_m(z) = \text{diag} \left\{ \underline{B}_m^r(z) \right\}, \quad r = 1, \dots, n \quad (2.28f)$$

$$\underline{B}_m^r(z) = \text{diag} \left\{ \underline{B}_{mi}(z) \right\}, \quad i = 1, \dots, q^r \quad (2.28g)$$

vorgegeben, also

$$\underline{Y}_m(z) = \underline{D}_m(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{B}_m(z) \underline{W}(z). \quad (2.29)$$

Die Grundstruktur des Regelkreises ist im Bild 2.2 dargestellt. Wird für die Berechnung der Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ der Ansatz

$$\underline{A}_m(z) \underline{B}(z) = \underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \quad (2.30a)$$

gewählt und Gl.(2.30a) in die Beziehung für das Ausgangssignal $\underline{Y}(z)$ für $\underline{Z}(z) = \underline{0}$ in Gl.(2.24) eingesetzt, so ergibt ein Vergleich mit dem idealen Modellverhalten $\underline{Y}_m(z)$ in Gl.(2.29) folgende Beziehung für die Reglermatrix $\underline{I}(z)$

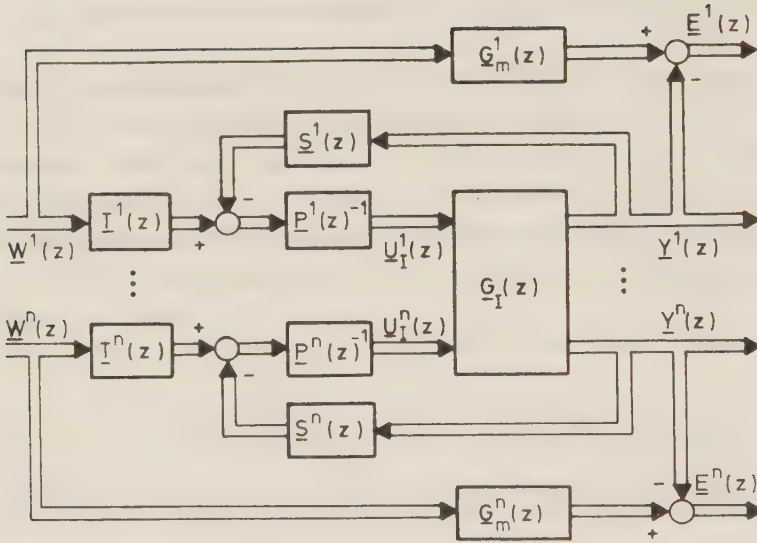


Bild 2.2 Die Grundstruktur des linearen Regelsystems mit Parallelmodell

$$\underline{I}(z) = \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{D}_m(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{B}_m(z). \quad (2.30b)$$

Im weiteren soll zunächst der Fall ohne Störungen, d. h. $\underline{Z}(z) = \underline{0}$, betrachtet werden. Das Ausgangssignal des geschlossenen Regelkreises lautet dann

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{B}(z)^{-1} \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{B}_m(z) \underline{W}(z). \quad (2.31)$$

Ideales Modellverhalten des geschlossenen Regelkreises ist nur möglich, wenn 4 Bedingungen erfüllt sind :

a) die Matrix $\underline{B}(z)$ ist invertierbar, d. h.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{B}(z) = \underline{K}, \quad \underline{0} < \underline{K} < \infty,$$

b) die Kompensation der Matrizen $\underline{B}(z)\underline{B}(z)^{-1}$ und $\underline{A}_m(z)^{-1}\underline{A}_m(z)$ ist zulässig,

c) die Matrix

$$\underline{D}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} = \underline{D}_e(z)$$

ist diagonal und realisierbar und

d) Gl.(2.30a) besitzt eine Lösung.

Die erste Bedingung ist aufgrund von Gl.(2.12) immer erfüllt. Bedingung b) ist erfüllt, wenn das Parallelmodell stabil ist und die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke alle innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen. Durch den Ansatz

$$\underline{D}_m(z) = \underline{D}_a(z) \quad (2.32a)$$

ist die dritte Bedingung automatisch erfüllt. Allerdings müssen dazu sämtliche Elemente der Matrix $\underline{D}_a(z)$ bekannt sein. Sind die Totzeiten der Regelstrecke nicht exakt bekannt, muß eine Abschätzung der maximalen Totzeit $d_{i,\max}$ für jedes Element der Matrix $\underline{D}_a(z)$ durchgeführt werden

$$\underline{D}_m(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_{i,\max}} \right\} = \underline{D}_e(z) \underline{D}_a(z) . \quad (2.32b)$$

In diesem Fall ist die Bedingung c) auch erfüllt. Da die Matrix $\underline{D}_a(z)$ jedoch nicht bekannt ist, wird $\underline{I}(z)$ zweckmäßigerweise nach

$$\underline{I}(z) = \underline{B}_m(z)$$

gewählt. Damit lautet das Ausgangssignal $\underline{Y}(z)$

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{B}_m(z) \underline{W}(z) . \quad (2.33)$$

Da die Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ blockdiagonale Struktur haben, kann Gl.(2.30a) nur für blockdiagonale Matrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ gelöst werden, d. h. die Regelstrecke muß dynamisch entkoppelt sein. Für vollständig verkoppelte Regelstrecken muß Gl.(2.30a) modifiziert werden. Hierzu wählt man den Ansatz :

$$\underline{A}_m(z) \underline{B}(z) = [\underline{I} + \underline{H}(z)] [\underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z)] . \quad (2.34)$$

Die Matrix $\underline{H}(z)$ stellt ein Maß dafür dar, wie genau das ideale Verhalten des Parallelmodells durch einen linearen Regler mit dezentraler Struktur erreicht werden kann. Sie spielt bei der Stabilitätsbetrachtung dezentraler adaptiver Regelsysteme nach Kapitel 4 eine wichtige Rolle. Das tatsächliche Ausgangssignal ergibt sich aus Gl.(2.24)

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z)^{-1} [\underline{I} + \underline{H}(z)] [\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) + \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z)]. \quad (2.35)$$

Wie im weiteren noch gezeigt wird, kommt dem Fehlersignal zwischen dem tatsächlichen Ausgangssignal $\underline{Y}(z)$ und dem idealen Ausgangssignal $\underline{Y}_m(z)$ bei der Stabilitätsanalyse dezentraler adaptiver Regelsysteme eine entscheidende Bedeutung zu. Mit der Definition für das Fehlersignal $\underline{E}_m(z)$

$$\underline{E}_m(z) = \underline{A}_m(z) [\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z)] \quad (2.36a)$$

ergibt sich mit den Gln.(2.35), (2.29) und (2.32b) für den störungsfreien Fall, d. h. $\underline{Z}(z) = \underline{0}$,

$$\underline{E}_m(z) = - \underline{D}_a(z) [\underline{H}(z) + \underline{I} - \underline{D}_e(z)] \underline{B}_m(z) \underline{W}(z). \quad (2.36b)$$

Bedingt durch die blockdiagonale Struktur der Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$ stellt der dezentrale Regler nach Gl.(2.34) keinen Kompensationsregler dar. Damit entfällt die Bedingung einer minimalphasigen Regelstrecke. Wie im Kapitel 4 noch gezeigt wird, ist eine adaptive Erweiterung des dezentralen Regelsystems jedoch nur für nichtminimalphasige Regelstrecken möglich. Deshalb wird im folgenden Kapitel der Entwurf des linearen Reglers für nichtminimalphasige Regelstrecken behandelt.

2.1.2 Der Entwurf des linearen Reglers für nichtminimalphasige Regelstrecken

Für nichtminimalphasige Regelstrecken, also Regelstrecken, die die Bedingung

$$\det \{ \underline{B}(z) \} = 0 \quad \text{für } |z| \geq 1 \quad (2.37)$$

erfüllen, ist eine Änderung der Struktur der Regelung (Hahn, 1983) nötig. Dazu wird der Regelstrecke ein sogenanntes *Korrektturnetzwerk* parallelgeschaltet. Diese Parallelschaltung wird auch als *erweiterte Regelstrecke* (Hahn, 1983) bezeichnet. Ein Blockschaltbild der erweiterten Regelstrecke ist im Bild 2.3 dargestellt. Das dynamische Verhalten des Korrekturnetzwerks

$$\underline{Y}_k(z) = \underline{G}_k(z) \underline{U}(z) \quad (2.38a)$$

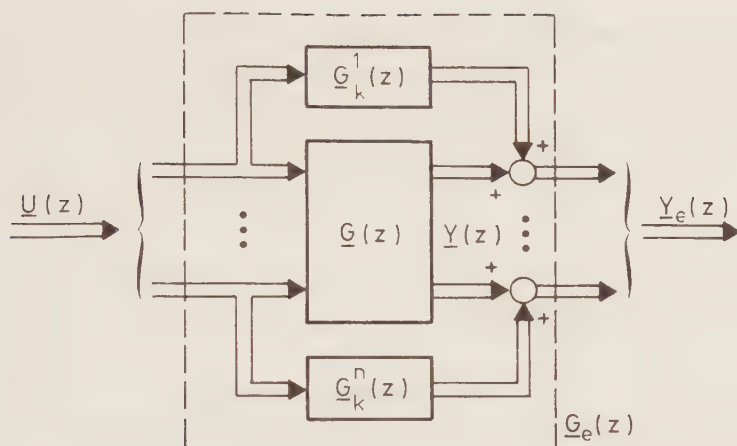


Bild 2.3 Zur Definition der erweiterten Regelstrecke

wird durch einen linken Polynommatrizenbruch

$$\begin{aligned} \underline{Y}_k(z) &= \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{D}_k(z) \underline{B}_k(z) (1-z^{-1}) \underline{U}(z) \\ &= \underline{D}_k(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{B}_k(z) (1-z^{-1})^{1-g} \underline{U}_I(z), \quad g = (0,1) \end{aligned} \quad (2.38b)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{D}_k(z) &= \text{diag} \left\{ \underline{D}_k^r(z) \right\} & r &= 1, \dots, n \\ \underline{D}_k^r(z) &= \text{diag} \left\{ z^{-d_{ki}} \right\} & i &= 1, \dots, q^r \end{aligned} \quad (2.38c)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_k(z) &= \text{diag} \left\{ \underline{A}_k^r(z) \right\} & r &= 1, \dots, n \\ \underline{A}_k^r(z) &= \text{diag} \left\{ \underline{A}_{ki}^r(z) \right\} & i &= 1, \dots, q^r \end{aligned} \quad (2.38d)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_k(z) &= \text{diag} \left\{ \underline{B}_k^r(z) \right\} & r &= 1, \dots, n \\ \underline{B}_k^r(z) &= \left\{ \underline{B}_{kij}(z) \right\} & i, j &= 1, \dots, q^r \end{aligned} \quad (2.38e)$$

und

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{B}_k(z) = \underline{K}, \quad 0 < \underline{K} < \infty \quad (2.38f)$$

beschrieben. Wird vorausgesetzt, daß die Polynommatrizen $\underline{A}_k(z)$ und $\underline{B}_k(z)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so sind die Nullstellen der erweiterten Regelstrecke $\underline{G}_e(z)$

$$\begin{aligned}\underline{G}_e(z) &= \underline{G}(z) + \underline{G}_k(z) \\ &= \underline{D}_k(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \left[\underline{D}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) (1-z^{-1}) \underline{A}(z) \right] \underline{A}(z)^{-1}\end{aligned}\quad (2.39)$$

durch den Ausdruck

$$\det \left\{ \underline{D}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) (1-z^{-1}) \underline{A}(z) \right\} = 0 \quad (2.40)$$

gegeben. Wird durch die Wahl eines geeigneten Korrektornetzwerks sichergestellt, daß die Übertragungsnullstellen der erweiterten Regelstrecke alle innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen

$$\det \left\{ \underline{B}_e(z) \right\} \neq 0 \quad \text{für } |z| \geq 1 \quad (2.41a)$$

mit

$$\underline{B}_e(z) = \underline{D}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1-z^{-1}), \quad (2.41b)$$

so kann der Regler nach Gl.(2.30a) und Gl.(2.30b) für die erweiterte Regelstrecke $\underline{G}_e(z)$ entworfen werden. Mit Gl.(2.38f) und Gl.(2.12) gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{B}_e(z) = \underline{K}, \quad 0 < \underline{K} < \infty \quad (2.42)$$

nur für den Fall, daß der Ausdruck

$$\underline{D}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) = \underline{D}_e(z) \quad (2.43a)$$

in Gl.(2.41b) realisierbar ist, also

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{D}_e(z) < \infty. \quad (2.43b)$$

Ist die Totzeitstruktur der Regelstrecke nicht genau bekannt, so kann diese Bedingung durch den Ansatz

$$\underline{D}_k(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_{i,\min}} \right\} \quad (2.44)$$

immer erfüllt werden, wobei $d_{i,\min}$ eine Abschätzung der minimalen Totzeit für jedes Element der Matrix $\underline{D}_a(z)$ darstellt. Da in diesem Fall die Totzeitstruktur der erweiterten Regelstrecke nach Gl.(2.39) genau bekannt ist, sind die Bedingungen a) und c) nach Kapitel 2.1.1 für ideales Modellverhalten der erweiterten Regelstrecke für

$$\underline{D}_m(z) = \underline{D}_k(z) \quad (2.45a)$$

erfüllt. Die Matrix $\underline{D}_e(z)$ ist im allgemeinen nicht bekannt. Deshalb kann sie für die folgenden Überlegungen der unbekannten Matrix $\underline{B}(z)$ der Regelstrecke zugeschlagen werden. Dann gilt

$$\underline{D}_m(z) = \underline{D}_k(z) = \underline{D}_a(z) = \text{diag} \left\{ z^{-d_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (2.45b)$$

Stimmt unter bestimmten Voraussetzungen die Struktur der Regelstrecke mit der Struktur des Korrektornetzwerkes nach Gl.(2.38a-e) überein, so können die Nullstellen der erweiterten Regelstrecke direkt vorgegeben werden. Enthält die Matrix $\underline{B}_e(z)$ die gewünschten Nullstellen, so kann mit dem Ansatz

$$\underline{B}_e(z) = \underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}), \quad (2.46a)$$

$$\underline{B}_e(z) = \text{diag} \left\{ \underline{B}_{ei}(z) \right\}, \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.46b)$$

$$\det \left\{ \underline{B}_{ei}(z) \right\} \neq 0, \quad |z| > 1 \quad (2.46b)$$

durch Lösen der diophantischen Gl.(2.46a) ein Korrektornetzwerk $\underline{G}_k(z)$ so berechnet werden, daß Gl.(2.41a) erfüllt ist (Kucera, 1979). Nach Gl.(2.38e) ist für den Entwurf des dezentralen adaptiven Regelsystems auch nur ein dezentrales Korrektornetzwerk zulässig. Deshalb besitzt Gl.(2.46a) im allgemeinen Fall keine Lösung. Zur Ermittlung eines geeigneten Korrektornetzwerkes kann in diesem Fall ein Verfahren von Hahn (1983) angewendet werden. Mit diesem Verfahren ist es immer möglich, für beliebige Regelstrecken ein diagonales Korrektornetzwerk zu berechnen, so daß Gl.(2.41a) erfüllt ist.

Für den Entwurf eines geeigneten Stellgesetzes wird zunächst davon ausgegangen, daß Gl.(2.30a) eine Lösung besitzt. Außerdem soll zunächst wieder der störungsfreie Fall, d. h. $\underline{Z}(z) = \underline{0}$, betrachtet werden. Das Fehlersignal

$$\underline{E}_m(z) = \underline{A}_m(z) [\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z) - \underline{Y}_k(z)] \quad (2.47a)$$

kann mit Gl.(2.26) und Gl.(2.29) für den Fall $\underline{D}_m(z) = \underline{D}_a(z) = \underline{D}_k(z)$ auch in der Form

$$\underline{E}_m(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z) \underline{B}(z) \underline{A}_I(z)^{-1} \underline{U}_I(z) - \underline{A}_m(z) \underline{Y}_k(z) \quad (2.47b)$$

angegeben werden. Wird in Gl.(2.47b) der Ausdruck $\underline{A}_m(z) \underline{B}(z)$ durch Gl.(2.30a) ersetzt, so ergibt sich mit Hilfe der Aufspaltung

$$\underline{A}_m(z) = \underline{P}'_k(z) \underline{A}_k(z) + \underline{D}_a(z) \underline{S}_k(z) \quad (2.48a)$$

$$\underline{D}_a(z) \underline{P}_k(z) = \underline{P}'_k(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}_k(z) (1 - z^{-1})^{1-g} \quad (2.48b)$$

folgende Beziehung für das Fehlersignal $\underline{E}_m(z)$

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) = \underline{D}_a(z) [\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{P}(z) (1 - z^{-1})^g \underline{U}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \\ - \underline{P}_k(z) (1 - z^{-1})^g \underline{U}(z) - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z)] . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Das Fehlersignal verschwindet, wenn das Stellgesetz nach der Beziehung

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^g} [\underline{P}(z) + \underline{P}_k(z)]^{-1} [\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z)] \quad (2.50a)$$

berechnet wird. Obwohl das Korrektornetzwerk als Teil der erweiterten Regelstrecke angesehen werden kann, stellt es selbstverständlich einen Teil des Reglers dar. Dies wird sofort deutlich, wenn mit Gl.(2.38b) das Stellgesetz in der Form

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^g} [\underline{P}(z) + \underline{P}_k(z) + \underline{S}_k(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \underline{B}_k(z) (1 - z^{-1})^{1-g}]^{-1} \\ [\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z)] \end{aligned} \quad (2.50b)$$

angegeben wird. Gl.(2.50b) stimmt mit Gl.(2.23) formal überein, wenn dort anstelle der Reglermatrix $\underline{P}(z)$ die erweiterte Reglermatrix $\underline{P}_e(z)$

$$\begin{aligned} \underline{P}_e(z) = \underline{P}(z) + \underline{P}_k(z) + \underline{S}_k(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \underline{B}_k(z) (1 - z^{-1})^{1-g} \\ = \underline{P}(z) + \underline{A}_m(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{B}_k(z) (1 - z^{-1})^{1-g} \end{aligned} \quad (2.51)$$

verwendet wird. Das Ausgangssignal des geschlossenen Regelkreises lautet dann mit Gl.(2.24) für $\underline{Z}(z) = 0$

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) = & \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right. \\ & \left. + \underline{A}_m(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \right]^{-1} \underline{B}_m(z) \underline{W}(z) . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \underline{C}(z) = & \underline{A}_k(z) \underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{A}_k(z) \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \\ & + \underline{A}_m(z) \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

kann $\underline{Y}(z)$ auch in der Form

$$\underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{Y}_m(z) \quad (2.54)$$

dargestellt werden. Einsetzen von Gl.(2.30a) führt schließlich auf

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}(z) \left[\underline{G}(z) + \underline{G}_k(z) \right]^{-1} \underline{Y}_m(z) . \quad (2.55)$$

Für vollständig verkoppelte Regelstrecken wird zur Umformung der Gl.(2.54) anstelle von Gl.(2.30a) die Gl.(2.34) verwendet. Es ergibt sich

$$\underline{Y}(z) = \left[\underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} + \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1} \right]^{-1} \underline{Y}_m(z) \quad (2.56)$$

Für $\underline{H}(z) = 0$ stimmen die Gleichungen (2.55) und (2.56) überein.

Auch in diesem Fall soll wieder das Fehlersignal $\underline{E}_m(z)$ betrachtet werden. Anstelle von Gl.(2.36a) wird $\underline{E}_m(z)$ jetzt durch die Gl.(2.47) beschrieben. Einsetzen von Gl.(2.54) und Gl.(2.38b) in Gl.(2.47) führt auf

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) = & \underline{A}_m(z) \left[\underline{I} - \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \left(\underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \right) \right. \\ & \left. \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \right] \underline{Y}_m(z) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.2 Der adaptive Grundregelkreis

2.2.1 Das Fehlermodell des adaptiven Regelkreises für minimalphasige Regelstrecken

Bis jetzt wurde das dynamische Verhalten des Regelkreises für konstante Reglerparameter untersucht. In diesem Abschnitt wird angenommen, daß die Parameter der Regelstrecke nicht bekannt sind. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß die Abschätzung der minimalen Totzeit der Regelstrecke nach Gl.(2.44) die Bedingung (2.43b) erfüllt. In diesem Fall können die Reglerparameter, also die Koeffizienten der Matrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$, nach Gl.(2.30a) oder Gl.(2.34) nicht bestimmt werden. Zur Berechnung der Stellgröße $\underline{U}_I(k)$ nach Gl.(2.23) werden vielmehr Schätzwerte der Reglerparameter verwendet, die von einem Adaptionsalgorithmus ermittelt werden. Dieser Adaptionsalgorithmus stellt eine zusätzliche nichtlineare Rückführung des Fehlersignals $\underline{E}_m(z)$ dar. Das Blockschaltbild des adaptiven Grundregelkreises ist im Bild 2.4 dargestellt. Im folgenden soll das Verhalten des Fehlersignals $\underline{e}_m(k)$ während des Adaptionsvorgangs behandelt und ein entsprechendes Fehlermodell abgeleitet werden. Betrachtet werden zunächst wieder minimalphasige Regelstrecken. Das Adaptionsfehlersignal, in diesem Fall

$$\begin{aligned}\underline{E}_m(z) &= \underline{A}_m(z) \underline{E}(z) = \underline{A}_m(z) [\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z)] \\ &= \underline{D}_a(z) \underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{A}_m \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{A}(z)^{-1} \underline{U}(z) - \underline{A}_m(z) \underline{Z}(z), \quad (2.58)\end{aligned}$$

wird dazu mit Gl.(2.34) aufgespalten in

$$\begin{aligned}\underline{E}_m(z) &= \underline{D}_a(z) [\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{P}(z) \underline{U}_I(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) - \underline{H}(z) \underline{P}(z) \underline{U}_I(z) \\ &\quad - \underline{H}(z) \underline{S}(z) \underline{Y}(z)] - [\underline{A}_m(z) - \underline{D}_a(z) (\underline{I} + \underline{H}(z)) \underline{S}(z)] \underline{Z}(z). \quad (2.59)\end{aligned}$$

Sind die Koeffizienten der Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$ nicht bekannt, so muß das Stellgesetz nach Gl.(2.23) mit geschätzten Parametern, die im weiteren durch das Symbol " $\hat{}$ " gekennzeichnet werden, berechnet werden, also

$$\begin{aligned}\underline{U}(z) &= \frac{1}{(1-z^{-1})^g} \underline{U}_I(z) \\ \underline{U}_I(z) &= \hat{\underline{P}}(z)^{-1} [\hat{\underline{T}}(z) \underline{W}(z) - \hat{\underline{S}}(z) \underline{Y}(z)]. \quad (2.60)\end{aligned}$$

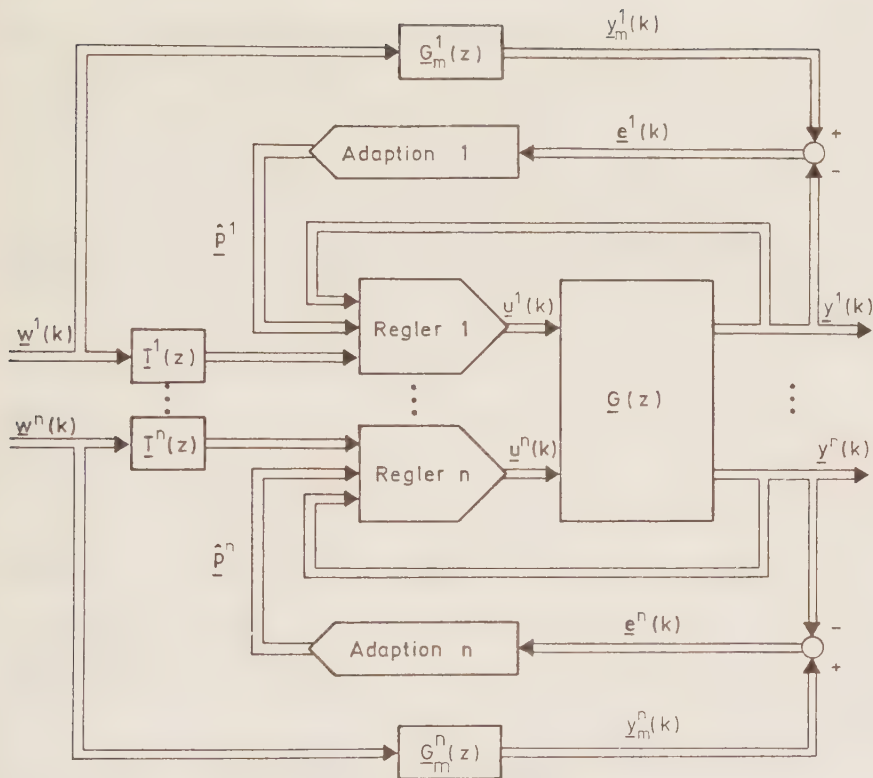


Bild 2.4 Der adaptive Grundregelkreis

Nach Gl.(2.30b) kann die Reglermatrix $\underline{I}(z)$ durch die Matrix $\underline{B}_m(z)$ ersetzt werden, wenn Gl.(2.45b) erfüllt ist. Wird Gl.(2.60) mit $\underline{I}(z) = \underline{B}_m(z)$ in Gl.(2.59) eingesetzt, so ergibt sich für das Fehlersignal $\underline{E}_m(z)$

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_m(z) = & \underline{D}_a(z) \left[\left(\hat{\underline{P}}(z) - \underline{P}(z) \right) \underline{U}_I(z) + \left(\hat{\underline{S}}(z) - \underline{S}(z) \right) \underline{Y}(z) \right] \\
 & - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{U}_I(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right] \\
 & - \left[\underline{A}_m(z) - \underline{D}_a(z) \left(\underline{I} + \underline{H}(z) \right) \underline{S}(z) \right] \underline{Z}(z) .
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Der Ausdruck

$$\underline{Y}(z) = - \underline{D}_a(z) \left[\left(\hat{\underline{P}}(z) - \underline{P}(z) \right) \underline{U}_I(z) + \left(\hat{\underline{S}}(z) - \underline{S}(z) \right) \underline{Y}(z) \right] \tag{2.62}$$

beschreibt die Abweichung der geschätzten Reglerparameter $\hat{\underline{p}}(z)$ und $\hat{\underline{s}}(z)$ von den Parametern in den Matrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$, die sich als Lösung der Gleichung (2.34) ergeben. $\underline{v}(z)$ wird deshalb im weiteren auch als *Parameterfehlersignal* bezeichnet. Im adaptiven Grundregelkreis werden die Koeffizienten der Reglermatrizen $\hat{\underline{p}}(z)$ und $\hat{\underline{s}}(z)$ von einem Adaptionsalgorithmus ermittelt. Das Stellgesetz nach Gl.(2.23) wird dann mit zeitvarianten Reglerparametern realisiert, die vom Adaptionsalgorithmus im Abtastschritt vorher ermittelt werden. Im Zeitbereich kann jede Komponente des Parameterfehlersignals $\underline{v}(k)$

$$\begin{aligned}\underline{v}(k) &= [\underline{v}^1(k)^T, \dots, \underline{v}^r(k)^T, \dots, \underline{v}^n(k)^T]^T \\ \underline{v}^r(k) &= [v_{1r}^r(k)^T, \dots, v_{ir}^r(k)^T, \dots, v_{qr}^r(k)^T] \end{aligned} \quad (2.63a)$$

durch die Gleichung

$$v_{ir}^r(k) = [\hat{p}_{i1}^r(k-d_{i1}^r-1) - p_{i1}^r]^T \underline{x}_{i1}^r(k-d_{i1}^r), \quad (2.63b)$$

wobei d_{i1}^r das jeweils dem entsprechenden Teilregler r zugeordnete Totzeitelement der Matrix $\underline{D}_a(z)$ beschreibt, angegeben werden. In dem Signalvektor $\underline{x}_{i1}^r(k)$ werden die Signale $\underline{u}^r(k)$ und $\underline{y}^r(k)$ bzw. ihre zeitlich zurückliegenden Werte nach

$$\begin{aligned}\underline{x}_{i1}^r(k) &= [-u_{1l}^r(k), -u_{1l}^r(k-1), \dots, -u_{1l}^r(k-n_{p,1l}^r), \\ &\vdots \\ &-u_{lj}^r(k), -u_{lj}^r(k-1), \dots, -u_{lj}^r(k-n_{p,ij}^r), \\ &\vdots \\ &-u_{lq}^r(k), -u_{lq}^r(k-1), \dots, -u_{lq}^r(k-n_{p,iq}^r), \\ &-y_{i1}^r(k), -y_{i1}^r(k-1), \dots, -y_{i1}^r(k-n_{s,i}^r)] \end{aligned} \quad (2.64a)$$

zusammengefaßt. Der Parametervektor $\hat{\underline{p}}_{i1}^r(k)$ enthält die adaptierten Reglerparameter jeder Komponente i des Teilreglers r

$$\begin{aligned}\hat{\underline{p}}_{i1}^r(k) &= [\hat{p}_{i1,0}^r(k), \hat{p}_{i1,1}^r(k), \dots, \hat{p}_{i1,n_{p,i1}^r}^r(k), \\ &\vdots \\ &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \hat{p}_{ij,0}^r(k), \hat{p}_{ij,1}^r(k), \dots, \hat{p}_{ij,n_{p,ij}}^r(k), \\
 & \vdots \\
 & \hat{p}_{iq,0}^r(k), \hat{p}_{iq,1}^r(k), \dots, \hat{p}_{iq,n_{p,iq}}^r(k), \\
 & \hat{s}_{i,0}^r(k), \hat{s}_{i,1}^r(k), \dots, \hat{s}_{i,n_{s,i}}^r(k) \quad] \quad .
 \end{aligned} \tag{2.64b}$$

Werden die Komponenten jedes Teilreglers zu den Signalvektoren $\underline{x}^r(k)$

$$\underline{x}^r(k) = [\underline{x}_1^r(k-d_1^r)^T, \dots, \underline{x}_i^r(k-d_i^r)^T, \dots, \underline{x}_{q_r}^r(k-d_{q_r}^r)^T]^T \tag{2.64c}$$

und die Parametervektoren $\hat{\underline{p}}_i^r(k)$ zu einer lokalen Parametermatrix $\hat{\underline{P}}^r(k)$

$$\hat{\underline{P}}^r(k) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{p}}_1^r(k)^T & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\underline{p}}_i^r(k) & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \hat{\underline{p}}_{q_r}^r(k)^T \end{bmatrix} \tag{2.64d}$$

zusammengefaßt, so läßt sich ein Signalvektor $\underline{x}_s(k)$

$$\underline{x}_s(k) = [\underline{x}^1T(k), \dots, \underline{x}^rT(k), \dots, \underline{x}^nT(k)]^T \tag{2.64e}$$

und eine Parametermatrix $\hat{\underline{P}}_s(k)$

$$\hat{\underline{P}}_s(k) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{p}}^1(k)^T & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\underline{P}}^r(k)^T & & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & & \hat{\underline{p}}^n(k)^T \end{bmatrix} \tag{2.64f}$$

für das gesamte adaptive Regelsystem definieren, so daß das Parameterfehlersignal $\underline{v}(k)$ auch durch die Gleichung

$$\underline{v}(k) = [\hat{\underline{P}}_s(k) - \underline{P}_s] \underline{x}_s(k) = [v_1(k), \dots, v_j(k), \dots, v_q(k)] \quad (2.65a)$$

$$v_j(k) = (\hat{\underline{p}}_j(k-d_j-1) - \underline{p}_j)^T \underline{x}_j(k-d_j) \quad (2.65b)$$

beschrieben werden kann. Dabei deutet der Index j an, daß im Gegensatz zu Gl.(2.63a) bedingt durch die Struktur des Signalvektors $\underline{x}_s(k)$ und der Parametermatrix $\hat{\underline{P}}_s(k)$ jede Komponente von $\underline{v}(k)$ auch unabhängig von einer Zuordnung zu einen entsprechenden Teilregler r angegeben werden kann.

Nach Bild 2.4 besteht über die Adaptionsgesetze ein Zusammenhang zwischen dem Adaptionfehlersignal $\underline{e}_m(k)$ nach Gl.(2.58) und der Parametermatrix $\hat{\underline{P}}_s(k)$ nach Gl.(2.64f). Da das Parameterfehlersignal $\underline{v}(k)$ nach Gl.(2.65a) seinerseits von $\hat{\underline{P}}_s(k)$ abhängt, besteht über die Adaptionsgesetze ein Zusammenhang zwischen den Signalen $\underline{e}_m(k)$ und $\underline{v}(k)$. Diese Abhängigkeit kann durch einen nichtlinearen Operator $\underline{H}_1$

$$\underline{e}_m(k) = \underline{H}_1 \underline{v}(k) = \text{diag} \{H_{1j}\} \underline{v}(k) \quad , \quad j = 1, \dots, q \quad (2.67)$$

beschrieben werden. Im weiteren sollen Adaptionsgesetze betrachtet werden, bei denen jeder Parametervektor $\hat{\underline{p}}_j(k)$ nach Gl.(2.65b) in Abhängigkeit von der zugehörigen Komponente des Adaptionfehlersignals $e_{mj}(k)$ nachgestellt wird. Der Operator $\underline{H}_1$ besteht aus q voneinander unabhängigen Übertragungsblöcken H_{1j} nach Bild 2.5. Die Eigenschaften dieser Übertragungsblöcke werden im nachfolgenden Kapitel 3 noch eingehender untersucht werden.

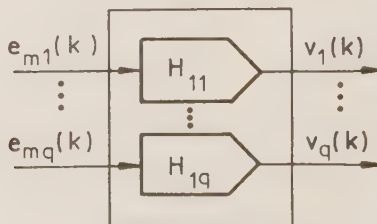


Bild 2.5 Zur Definition der Übertragungsblöcke H_{1j}

Das gesamte Fehlermodell nach Gl.(2.61), Gl.(2.62) und Gl.(2.67)

$$\underline{E}_m(z) = - \underline{Y}(z) + \underline{E}_m^*(z) \quad (2.66a)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{E}_m^*(z) = & - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{U}_I(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right] \\ & - \left[\underline{A}_m(z) - \underline{D}_a(z) \left(\underline{I} + \underline{H}(z) \right) \underline{S}(z) \right] \underline{Z}(z) \end{aligned} \quad (2.66b)$$

kann durch die rückgekoppelte Struktur nach Bild 2.6 beschrieben werden.

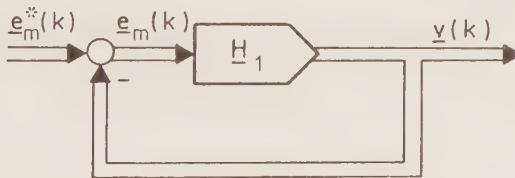


Bild 2.6 Ein Fehlermodell für den adaptiven Grundregelkreis

Im vollständig adaptierten Zustand folgt für Gl.(2.62) $\underline{Y}(z) = 0$. Dieser Zustand des adaptiven Grundregelkreises wird auch als *angepaßter Zustand*, die sich ergebenden Reglerparameter als *angepaßte Reglerparameter* bezeichnet. Das verbleibende Fehlersignal $\underline{E}_m^*(z)$ gibt den Adaptionsfehler im vollständig adaptierten Zustand an. Es wird deshalb auch als *angepaßtes Fehlersignal* bezeichnet.

Es ergibt sich ein sehr einfaches Fehlermodell, das die Grundlage für die meisten der in der Literatur bis jetzt vorgestellten Stabilitätsbetrachtungen, z.B. nach der Hyperstabilitätstheorie (Landau (1979), Schmid (1979)) oder nach der direkten Methode von Ljapunow (Hahn, 1983), bildet. In einer frühen Arbeit über den Einsatz dezentraler adaptiver Regler für die Frequenz-Leistungs-Regelung von elektrischen Verbundnetzen (Hamza, Agathoklis und Chan, 1982) wird das Signal $\underline{e}_m^*(k)$ in Gl.(2.67) als eine

stochastische Störung, die auf den Regelkreis einwirkt, modelliert. Dann können Standardverfahren (Landau, 1982), die aus der Literatur zur Stabilitätsanalyse stochastisch gestörter adaptiver Regelsysteme bekannt sind zur Abschätzung der Signale des adaptiven Grundregelkreises verwendet werden. Andere Verfahren zur Analyse deterministisch gestörter Systeme (Peterson und Narendra (1982), Hahn (1983)) benötigen eine Abschätzung des auf den adaptiven Regelkreis einwirkenden Störsignals $\underline{e}_m^*(k)$. Das Störsignal $\underline{e}_m^*(k)$ hängt nach Gl.(2.66) jedoch von den im adaptiven Regelkreis auftretenden Signalen $\underline{U}_I(z)$ und $\underline{Y}(z)$ ab. Diese Darstellung ist deshalb für eine Stabilitätsanalyse unbrauchbar. Mit Gl.(2.26) kann Gl.(2.61) auch in der Form

$$\begin{aligned} \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{E}_m(z) = & \\ & - \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{Y}(z) - \underline{H}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right] \underline{B}(z)^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{Y}(z) \\ & - \left[\underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) - \left(\underline{I} + \underline{H}(z) \right) \underline{S}(z) - \underline{H}(z) \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \right] \underline{Z}(z) \end{aligned} \quad (2.68)$$

angegeben werden. Wird in Gl.(2.68) $\underline{Y}(z)$ durch

$$\underline{Y}(z) = - \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{E}_m(z) + \underline{Y}_m(z) \quad (2.69)$$

ersetzt, so ergibt sich unter Beachtung von Gl.(2.34)

$$\begin{aligned} \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{E}_m(z) = & - \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{Y}(z) + \underline{H}(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{E}_m(z) \\ & - \underline{H}(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{Y}_m(z) - \left[\underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \right. \\ & \left. - \left(\underline{I} + \underline{H}(z) \right) \underline{S}(z) - \underline{H}(z) \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \right] \underline{Z}(z) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Gl.(2.70) kann nun nach $\underline{E}_m(z)$ aufgelöst werden. Unter Beachtung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{I} - \underline{H}(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} &= \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} \\ \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right]^{-1} \underline{H}(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] &= \underline{H}(z) \end{aligned} \quad (2.71)$$

lautet dann das Fehlermodell für den adaptiven Regelkreis

$$\underline{E}_m(z) = -\underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_3(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \quad (2.72a)$$

mit

$$\underline{H}_2(z) = \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.72b)$$

$$\underline{H}_3(z) = - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} = \left[\underline{I} - \underline{H}_2(z) \right] \underline{A}_m(z) \quad (2.72c)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_4(z) &= - \underline{A}_m(z) + \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{S}(z) \\ &= - \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} . \end{aligned} \quad (2.72d)$$

Das Fehlersignal im angepaßten Zustand ($\underline{Y}(z) = \underline{0}$)

$$\underline{E}_m^*(z) = \underline{H}_3(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \quad (2.73)$$

hängt in dieser Form im Gegensatz zu der Darstellung nach Gl.(2.66) über die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_3(z)$ und $\underline{H}_4(z)$ nur noch von den von außen auf den adaptiven Regelkreis einwirkenden Signalen ab. Sind die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_3(z)$ und $\underline{H}_4(z)$ stabil, dann ist das Fehlersignal im angepaßten Zustand beschränkt, wenn das Modellausgangssignal $\underline{y}_m(k)$ und die Störung $\underline{z}(k)$ beschränkt sind.

Das gesamte Fehlermodell nach Gl.(2.72) ist im Bild 2.7 dargestellt.

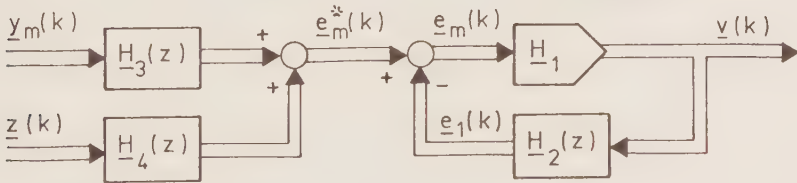


Bild 2.7 Das Fehlermodell des dezentralen adaptiven Regelkreises

Für die Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelkreises ist außer dem Verhalten der Fehlersignale $\underline{E}_m(z)$ und $\underline{Y}(z)$ auch das dynamische Verhalten des Ausgangssignals $\underline{Y}(z)$ und des Stellsignals $\underline{U}_1(z)$ von Bedeutung. Aus der Gleichung (2.72a)

$$\underline{A}_m(z) \left[\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z) \right] = - \underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_3(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \quad (2.74)$$

ergibt sich für $\underline{Y}(z)$ die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) &= \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) + \left[\underline{I} - \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{H}_3(z) \right] \underline{Y}_m(z) - \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \\ &= \underline{H}_5(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_6(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_7(z) \underline{Z}(z) . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Das Ausgangssignal bleibt beschränkt, wenn die Signale $\underline{Y}_m(z)$, $\underline{Z}(z)$ und $\underline{Y}(z)$ beschränkt sind und wenn $\underline{H}_5(z)$, $\underline{H}_6(z)$ und $\underline{H}_7(z)$ stabile Übertragungsmatrizen darstellen. Für das Stellsignal $\underline{U}_1(z)$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}\underline{U}_1(z) &= \underline{G}(z)^{-1} \left[\underline{Y}(z) - \underline{Z}(z) \right] (1-z^{-1})^2 \\ &= \underline{H}_8(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_9(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_{10}(z) \underline{Z}(z),\end{aligned}\quad (2.76)$$

wobei auch $\underline{H}_8(z)$, $\underline{H}_9(z)$ und $\underline{H}_{10}(z)$ stabile Übertragungsmatrizen darstellen müssen. Im einzelnen gilt :

$$\underline{H}_2(z) = \underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.77a)$$

$$\underline{H}_3(z) = \left[\underline{I} - \underline{H}_2(z) \right] \underline{A}_m(z) \quad (2.77b)$$

$$\underline{H}_4(z) = -\underline{A}_m(z) + \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{S}(z) \quad (2.77c)$$

$$\begin{aligned}\underline{H}_5(z) &= \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{D}_a(z)^{-1} \\ &= \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1}\end{aligned}\quad (2.77d)$$

$$\begin{aligned}\underline{H}_6(z) &= \underline{D}_a(z) \underline{A}_m(z)^{-1} \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \\ &= \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1}\end{aligned}\quad (2.77e)$$

$$\begin{aligned}\underline{H}_7(z) &= \underline{I} - \underline{A}_m(z)^{-1} + \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{S}(z) \\ &= \underline{I} - \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{S}(z)\end{aligned}\quad (2.77f)$$

$$\underline{H}_8(z) = \underline{A}_1(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.77g)$$

$$\underline{H}_9(z) = \underline{A}_1(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_m \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.77h)$$

$$\underline{H}_{10}(z) = -\underline{A}_1(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{S}(z) \quad (2.77i)$$

mit

$$\underline{C}(z) = \underline{P}(z) \underline{A}_1(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) . \quad (2.78)$$

Alle Übertragungsmatrizen sind stabil, wenn die Wurzeln von

$$\det \left\{ \underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right\} \quad (2.79)$$

innerhalb des Einheitskreises liegen. Existiert also ein Regler, bestehend aus den Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$, der die Regelstrecke stabilisiert, dann bleiben die Signale $\underline{e}_m(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{u}_I(k)$ beschränkt, wenn $\underline{y}_m(k)$, $\underline{v}(k)$ und $\underline{z}(k)$ beschränkt bleiben.

2.2.2 Das Fehlermodell des adaptiven Regelkreises für nichtminimalphasige Regelstrecken

Die Ableitung des Fehlermodells für nichtminimalphasige Regelstrecken erfolgt in gleicher Weise wie die Ableitung des Fehlermodells für minimalphasige Regelstrecken im vorherigen Kapitel. Werden in das Adaptionsfehlersignal $\underline{E}_m(z)$

$$\underline{E}_m(z) = \underline{A}_m(z) \left[\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z) - \underline{Y}_k(z) \right]$$

die Gl.(2.34)

$$\underline{A}_m(z) \underline{B}(z) = \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \left[\underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \right]$$

und die Gln.(2.48a) und (2.48b)

$$\underline{A}_m(z) = \underline{P}'_k(z) \underline{A}_k(z) + \underline{D}_a \underline{S}_k(z)$$

$$\underline{D}_a(z) \underline{P}_k(z) = \underline{P}'_k(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}_k(z) (1 - z^{-1})^{1-g}$$

eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) &= \underline{D}_a(z) \left[\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{P}(z) \underline{U}_I(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) - \underline{P}_k(z) \underline{U}_I(z) \right. \\ &\quad \left. - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z) \right] - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) \left[\underline{P}(z) \underline{U}_I(z) + \underline{S}(z) \underline{Y}(z) \right] \\ &\quad - \left[\underline{A}_m(z) - \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} + \underline{H}(z) \right] \underline{S}(z) \right] \underline{Z}(z). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Anstelle von Gl.(2.60) wird für nichtminimalphasige Regelstrecken das Stellgesetz

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^g} \underline{U}_I(z) \quad (2.81)$$

$$\underline{U}_I(z) = \left[\hat{\underline{P}}(z) + \underline{P}_k(z) \right]^{-1} \left[\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \hat{\underline{S}}(z) \underline{Y}(z) - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z) \right]$$

verwendet. Spaltet man die Matrix der Absolutkoeffizienten aus den Polynommatrizen $\hat{\underline{P}}(z)$ und $\underline{P}_k(z)$ ab

$$\hat{\underline{P}}(z) = \hat{\underline{P}}_0 + \underline{P}'(z) z^{-1} \quad (2.82a)$$

$$\underline{P}_k(z) = \underline{P}_{k0} + \underline{P}'_k(z) z^{-1}, \quad (2.82b)$$

so kann das Stellgesetz auch in der Form

$$\underline{U}_I(z) = [\hat{\underline{P}}_0 + \underline{P}_{k0}]^{-1} [\underline{X}(z) - \hat{\underline{S}}(z) \underline{Y}(z) - \hat{\underline{P}}'(z) z^{-1} \underline{U}_I(z)] \quad (2.83)$$

$$\underline{X}(z) = \underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{P}'_k(z) z^{-1} \underline{U}_I(z) - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z) \quad (2.84)$$

angegeben werden. $\underline{X}(z)$ ist ein Hilfssignalvektor, der nur aus bekannten Parametern und gemessenen Signalen berechnet werden kann. Gl.(2.81) in Gl.(2.80) eingesetzt ergibt die schon aus dem vorherigen Kapitel bekannte Gleichung (2.68) für den Adaptionsfehler und daraus mit Gl.(2.34)

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) &= \underline{D}_a(z) \left[(\hat{\underline{P}}(z) - \underline{P}(z)) \underline{U}_I(z) + (\hat{\underline{S}}(z) - \underline{S}(z)) \underline{Y}(z) \right] \\ &\quad - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) [\underline{I} + \underline{H}(z)]^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{Y}(z) \\ &\quad - [\underline{A}_m(z) - \underline{D}_a(z) (\underline{I} + \underline{H}(z)) \underline{S}(z) - \underline{H}(z) \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1}] \underline{Z}(z). \end{aligned}$$

Anstelle von Gl.(2.69) wird bei der Verwendung eines Korrektornetzwerks $\underline{Y}(z)$ in Gl.(2.68) durch

$$\underline{Y}(z) = -\underline{A}_m(z)^{-1} \underline{E}_m(z) + \underline{Y}_m(z) - \underline{Y}_k(z) \quad (2.85a)$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) &= [\underline{I} + \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1}]^{-1} [-\underline{A}_m(z)^{-1} \underline{E}_m(z) + \underline{Y}_m(z) \\ &\quad + \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z)] \end{aligned} \quad (2.85b)$$

ersetzt. Es folgt aus Gl.(2.68)

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) &= -\underline{Y}(z) - \underline{D}_a(z) \underline{H}(z) [\underline{I} + \underline{H}(z)]^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{G}(z) [\underline{G}(z) \\ &\quad + \underline{G}_k(z)]^{-1} [-\underline{A}_m(z)^{-1} \underline{E}_m(z) + \underline{Y}_m(z) + \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z)] \\ &\quad - \underline{D}_a(z) \underline{P}(z) (1-z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \underline{Z}(z). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Auflösen von Gl.(2.86) nach $\underline{E}_m(z)$ führt dann auf das Fehlermodell

$$\underline{E}_m(z) = - \underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_3(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \quad (2.87)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{H}_2(z) &= \underline{D}_a(z) \left[\underline{I} - \underline{H}(z) \left(\underline{I} + \underline{H}(z) \right)^{-1} \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{G}(z) \right. \\ &\quad \left. \left(\underline{G}(z) + \underline{G}_k(z) \right)^{-1} \underline{A}_m(z)^{-1} \underline{D}_a(z) \right]^{-1} \underline{D}_a(z)^{-1} \end{aligned} \quad (2.88a)$$

$$\underline{H}_3(z) = \left[\underline{I} - \underline{H}_2(z) \right] \underline{A}_m(z) \quad (2.88b)$$

$$\underline{H}_4(z) = \underline{H}_2(z) \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1} - \underline{H}_2(z) \underline{D}_a(z) \underline{P}(z) (1 - z^{-1})^g \underline{G}(z)^{-1} \quad (2.88c)$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{H}_2(z) &= \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \left[\underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \right] \underline{C}(z)^{-1} \\ &\quad \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \end{aligned} \quad (2.89a)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_3(z) &= \underline{A}_m(z) \left[\underline{I} - \underline{D}_a(z) \underline{A}_k^{-1}(z) \left(\underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \right) \underline{C}(z)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \right] \end{aligned} \quad (2.89b)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_4(z) &= \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z) \underline{A}_k(z)^{-1} \left[\underline{A}_k(z) \underline{B}(z) + \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \right] \underline{C}(z)^{-1} \\ &\quad \underline{A}_k(z) \underline{S}(z) - \underline{A}_m(z) , \end{aligned} \quad (2.89c)$$

wobei $\underline{C}(z)$ durch Gl.(2.53)

$$\underline{C}(z) = \underline{A}_k(z) \underline{P}(z) \underline{A}_f(z) + \underline{A}_k(z) \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) + \underline{A}_m(z) \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1})$$

bestimmt ist.

Im folgenden soll noch einmal der Fall betrachtet werden, daß die Gl.(2.34) für $\underline{H}(z) = \underline{0}$ eindeutig lösbar ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Regelstrecke nicht verkoppelt ist oder wenn für eine vollständig verkoppelte Regelstrecke ein vollständiger Mehrgrößenregler eingesetzt wird und die Ordnungen der Reglerpolynome entsprechend gewählt werden. Dann gilt

$$\underline{H}_2(z) = \underline{I} \quad (2.90a)$$

und

$$\underline{H}_3(z) = \underline{0} \quad (2.90b)$$

Das Fehlermodell ist im Bild 2.8 dargestellt.

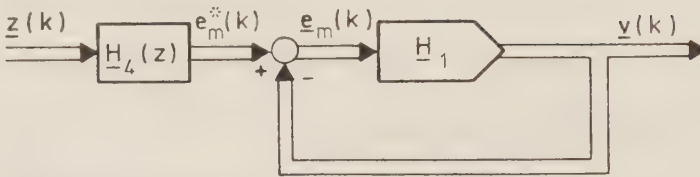


Bild 2.8 Das Fehlermodell für den vollständigen adaptiven Mehrgrößenregler

Es wird über die Übertragungsmatrix $\underline{H}_4(z)$ nur von den auf den Grundregelkreis einwirkenden Störungen angeregt.

Neben dem Verhalten der Fehlersignale $\underline{E}_m(z)$ und $\underline{Y}(z)$ ist wiederum das dynamische Verhalten des Ausgangssignals $\underline{Y}(z)$ und des Stellsignals $\underline{U}_1(z)$ von Bedeutung. Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) &= \underline{A}_m(z) [\underline{Y}_m(z) - \underline{Y}(z) - \underline{Y}_k(z)] \\ &= -\underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_3(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \end{aligned} \quad (2.91)$$

erhält man für das Ausgangssignal $\underline{Y}(z)$

$$\begin{aligned} \underline{A}_m(z) \underline{Y}(z) &= [\underline{A}_m(z) - \underline{H}_3(z)] \underline{Y}_m(z) - \underline{H}_4(z) \underline{Z}(z) \\ &\quad + \underline{H}_2(z) \underline{Y}(z) - \underline{A}_m(z) \underline{G}_k(z) \underline{G}(z)^{-1} [\underline{Y}(z) - \underline{Z}(z)] \end{aligned} \quad (2.92)$$

und nach Auflösen nach $\underline{Y}(z)$

$$\underline{Y}(z) = \underline{H}_5(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_6(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_7(z) \underline{Z}(z) \quad (2.93a)$$

mit

$$\underline{H}_5(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.93b)$$

$$\underline{H}_6(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \quad (2.93c)$$

$$\underline{H}_7(z) = \underline{I} - \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{S}(z). \quad (2.93d)$$

Für das Stellsignal ergibt sich in gleicher Weise

$$\underline{U}_I(z) = \underline{H}_8(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_9(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_{10}(z) \underline{Z}(z) \quad (2.94)$$

mit

$$\underline{H}_8(z) = \underline{A}_I(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \quad (2.95a)$$

$$\underline{H}_9(z) = \underline{A}_I(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{D}_a(z)^{-1} \underline{A}_m(z) \quad (2.95b)$$

$$\underline{H}_{10}(z) = \underline{A}_I(z) \underline{C}(z)^{-1} \underline{A}_k(z) \underline{S}(k). \quad (2.95c)$$

Sind die Signale $\underline{z}(k)$, $\underline{v}(k)$ und $\underline{y}_m(k)$ beschränkt, so sind die Signale $\underline{e}_m(k)$, $\underline{u}_I(k)$ und $\underline{y}(k)$ ebenfalls beschränkt, wenn die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$ bis $\underline{H}_{10}(z)$ stabil sind. Eine Voraussetzung für die Stabilität der Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$ bis $\underline{H}_{10}(z)$ ist, daß die Matrix $\underline{C}(z)$ nach Gl.(2.53) stabil ist, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$\det \left\{ \underline{A}_k(z) \underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{A}_k(z) \underline{S}(z) \underline{D}(z) \underline{B}(z) + \underline{A}_m(z) \underline{B}_k(z) \underline{A}_I(z) (1-z^{-1}) \right\} = 0 \quad (2.96)$$

müssen im Einheitskreis der z -Ebene liegen. Da die Wurzeln des Ausdrucks $\det \{ \underline{A}_k(z) \}$ in den Matrizen $\underline{H}_2(z)$, $\underline{H}_4(z)$ sowohl als Pole als auch als Übertragungsnullstellen auftreten, müssen sie bei einer Betrachtung des Eingangs/Ausgangsverhaltens nicht berücksichtigt werden (BIBO-Stabilität). Es handelt sich lediglich um eine formale Erweiterung mit der Polynommatrix $\underline{A}_k(z)$, die zur übersichtlichen Darstellung des Ausdrucks für die Matrizen $\underline{H}_2(z)$, $\underline{H}_3(z)$ und $\underline{H}_4(z)$ eingeführt wird. Dies wird sofort deutlich, wenn Gl.(2.89a) in der Form

$$\begin{aligned} \underline{H}_2(z) = & \underline{A}_m(z) \left[\underline{G}(z) + \underline{G}_k(z) \right] \left[\underline{D}_a(z) \underline{P}(z) (1 - z^{-1})^g + \underline{D}_a(z) \underline{S}(z) \underline{G}(z) \right. \\ & \left. + \underline{A}_m(z) \underline{G}_k(z) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.97)$$

angegeben wird. Wird anstelle der Gl.(2.9) die Regelstrecke durch ein linken Polynom-matrizenbruch

$$\underline{G}(z) = \underline{A}^{-1}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}'(z) \quad (2.98a)$$

und das Korrekturnetzwerk anstelle von Gl.(2.38a,b) durch einen rechten Polynommatrizenbruch

$$\underline{G}_k(z) = \underline{D}_a(z) \underline{B}'_k(z) (1 - z^{-1})^g \underline{A}'_k^{-1}(z) \quad (2.98b)$$

beschrieben, so folgt

$$\begin{aligned} \underline{H}_2(z) = & \underline{A}_m(z) \underline{D}_a(z) \underline{A}'(z)^{-1} \left[\underline{B}'(z) \underline{A}_k'(z) + \underline{A}'_1(z) \underline{B}'_k(z) \right] \\ & \left[\underline{A}'_1(z) \underline{P}(z) \underline{A}_k'(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}'(z) \underline{A}'_k'(z) + \underline{A}_m(z) \underline{A}'_1(z) \underline{B}'_k(z) \right]^{-1} \\ & \underline{A}'(z) \underline{D}_a(z)^{-1} . \end{aligned} \quad (2.99)$$

In Gl.(2.99) ist der Ausdruck für die Matrix $\underline{H}_2(z)$ formal so erweitert worden, daß nun die Wurzeln des Ausdrucks $\det \{\underline{A}(z)\}$ sowohl als Pole, als auch als Übertragungsnullstellen auftauchen.

Der Signalvektor für das gesamte adaptive Regelsystem $\underline{x}_s(k)$ nach Gl.(2.64e) enthält nach Gl.(2.64c) und Gl.(2.64a) als Elemente nur die einzelnen Komponenten des Stellgrößenvektors $\underline{u}_1(k)$ und des Ausgangsgrößenvektors $\underline{y}(k)$ beziehungsweise ihre verzögerten Werte. Dann können mit den Gleichungen (2.93a) und (2.94) Übertragungsmatrizen $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ konstruiert werden, so daß die folgende Gleichung erfüllt ist

$$\underline{X}_s(z) = \underline{H}_{11}(z) \underline{Y}(z) + \underline{H}_{12}(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_{13}(z) \underline{Z}(z) . \quad (2.100)$$

Die Matrizen $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ enthalten als Elemente nur die Elemente der Matrizen $\underline{H}_5(z)$ bis $\underline{H}_{10}(z)$, die jeweils mit entsprechenden Faktoren z^{-i} multipliziert werden. Sie sind stabil, wenn die Wurzeln der Gl.(2.96) im Einheitskreis der z -Ebene liegen. Bild 2.9 zeigt eine erweiterte Darstellung des Fehlermodells für das gesamte adaptive Regelsystem.

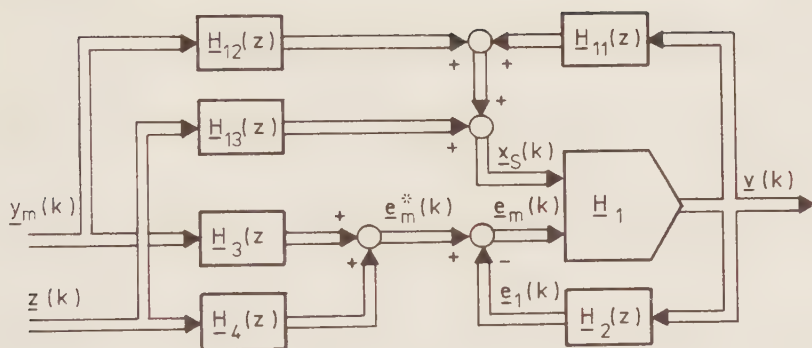


Bild 2.9 Erweiterte Darstellung des Fehlermodells des gesamten adaptiven Regelsystems

3. Sektoreigenschaften verschiedener Adaptionalgorithmen

3.1. Standardalgorithmen mit übergreifender Parameteradaption

Nach Bild 2.5 beschreibt der Operator $\underline{H}_1$ die Beziehung zwischen dem Parameterfehlersignal $\underline{v}(k)$ und dem Adaptionfehlersignal $\underline{e}_m(k)$

$$v_i(k) = (\hat{p}_i(k-d_i-1) - p_i)^T x_i(k-d_i) = H_{1i} e_{mi}(k) \quad (3.1)$$

$$\underline{v}(k) = \underline{H}_1 \underline{e}_m(k) \quad \text{mit } \underline{H}_1 = \text{diag} \left\{ H_{1i} \right\}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.2)$$

$\underline{H}_1$ hängt vom gewählten Adaptionsgesetz für die Reglerparameter ab. Die Standardalgorithmen für die Parameteradaption besitzen I-Struktur

$$\hat{p}_i(k) = \hat{p}_i(k-1) + \underline{G}_i(k) x_i(k-d_i) e_{mi}(k), \quad (3.3)$$

wobei die Matrix $\underline{G}_i(k)$ durch das spezielle Adaptionsgesetz festgelegt wird. Adaptionsgesetze dieser Form beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Adaptionfehlersignal $e_{mi}(k)$ und dem Parameterfehlersignal $v_i^*(k)$

$$v_i^*(k) = (\hat{p}_i(k-1) - p_i)^T x_i(k-d_i), \quad (3.4)$$

wobei $v_i^*(k)$ im Gegensatz zu $v_i(k)$ von dem zum Zeitpunkt $k-1$ und nicht zum Zeitpunkt $k-d_i-1$ geschätzten Parametervektor abhängt. Um die Stabilität des adaptiven Grundregelkreises mit einem Adaptionsgesetz nach Gl.(3.3) untersuchen zu können, muß deshalb das Fehlermodell nach Bild 2.7 modifiziert werden. Definiert man das Hilfssignal $k_i(k)$

$$\begin{aligned} k_i(k) &= v_i(k) - v_i^*(k) \\ &= (\hat{p}_i(k-d_i-1) - \hat{p}_i(k-1))^T x_i(k-d_i), \end{aligned} \quad (3.5)$$

das aus den abgespeicherten Parametervektoren $\hat{p}_i(k-d_i-1)$ und $\hat{p}_i(k-1)$ gewonnen werden kann, so ergibt sich aus dem Fehlermodell nach Gl.(2.72a) und Gl.(2.73)

$$\underline{E}_m(z) = -\underline{H}_2(z) \underline{V}(z) + \underline{E}_m^*(z)$$

das modifizierte Fehlermodell nach Bild 3.1

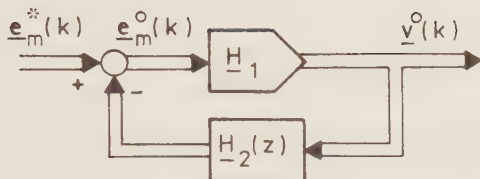


Bild 3.1 Das modifizierte Fehlermodell des adaptiven Grundregelkreises

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(z) + \underline{H}_2(z) \underline{K}(z) &= -\underline{H}_2(z) [\underline{Y}(z) - \underline{K}(z)] + \underline{E}_m^{*}(z) \\ &= -\underline{H}_2(z) \underline{Y}^{\circ}(z) + \underline{E}_m^{*}(z) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zur Adaption wird dann nicht mehr das Adaptionssignalsignal $\underline{E}_m(z)$, sondern das sogenannte *vermehrte Fehlersignal* $\underline{E}_m^{\circ}(z)$ (Ionescu und Monopoli, 1977)

$$\underline{E}_m^{\circ}(z) = \underline{E}_m(z) + \underline{H}_2(z) \underline{K}(z) \quad (3.7)$$

verwendet. Das vermehrte Fehlersignal $\underline{E}_m^{\circ}(z)$ kann nur dann berechnet werden, wenn die Matrix $\underline{H}_2(z)$ im Rückwärtszweig bekannt ist. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die Struktur des Reglers in Anlehnung an die Struktur der Regelstrecke gewählt wird, so daß Gl.(2.30a) eine Lösung besitzt. Dann gilt

$$\underline{H}(z) = \underline{0} \quad (3.8)$$

und mit Gl.(2.72b) bzw. Gl.(2.88a)

$$\underline{H}_2(z) = \underline{I} . \quad (3.9)$$

Im weiteren soll jedoch der Entwurf eines dezentralen adaptiven Regelsystems für eine vollständig verkoppelte Regelstrecke mit unbekannten Parametern betrachtet werden. Dann hängt nach Kapitel 2.2 (Gl.(2.89a)) die Matrix $\underline{H}_2(z)$ von den unbekannten Parametern der Regelstrecke ab. Die Adaption mit einem vermehrten Fehlersignal nach Gl.(3.7) ist nicht möglich.

Deshalb wird anstelle von Gl.(3.3) ein Adaptionsgesetz mit *übergreifender* Parameteranpassung der Form

$$\hat{\underline{p}}_i(k) = \hat{\underline{p}}_i(k-d_i-1) + \underline{G}_i(k) \underline{x}_i(k-d_i) \underline{e}_{mi}(k) \quad (3.10)$$

verwendet. Bei diesen Adaptionsgesetzen wird im Gegensatz zu den Standardalgorithmen nach Gl.(3.3) nicht der im vorherigen Abtastschritt ermittelte Reglerparametervektor $\hat{\underline{p}}_i(k-1)$ sondern ein d_i+1 Schritte vorher berechneter Vektor $\hat{\underline{p}}_i(k-d_i-1)$ aktualisiert. Dieses Gesetz beschreibt genau den Zusammenhang zwischen dem Adaptionsfehlersignal $\underline{e}_{mi}(k)$ und dem Parameterfehlersignal $\underline{v}_i(k)$ nach Gl.(3.1) bzw. Gl.(3.2). Zur Stabilitätsanalyse kann direkt das Fehlermodell nach Bild 2.7 verwendet werden. In der Literatur wurden dazu Verfahren vorgestellt, die vorwiegend auf der Hyperstabilitätstheorie (Landau (1979), Schmid (1979)) oder der direkten Methode von Ljapunow (Hahn (1983), Goodwin, Ramadge und Caines (1980)) beruhen. Bis jetzt wurde zur Stabilitätsanalyse dezentraler adaptiver Regelsysteme überwiegend die direkte Methode von Ljapunow verwendet (Ioannou und Kokotovic (1983b), Ioannou und De Ponte (1984), Bundell (1985), Gavel und Siljak (1985b), Benhammou und Titli (1986)). Im wesentlichen wurden dabei einfache Adaptionalgorithmen mit I-Struktur und konstanter Verstärkungsmatrix $\underline{G}$ untersucht (fixed-gain Algorithmen). An dieser Stelle soll zur Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelsystems das Sektor-Stabilitätstheorem (Anhang A) verwendet werden. Der Operator H_{1i} nach Gl.(3.2) muß nach Theorem A.2 und A.3 entweder die Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N \left[\underline{v}_i(k) - \underline{C}_i \underline{e}_i(k) \right]^2 - R_i^2 \underline{e}_i(k)^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (3.11)$$

d. h.

H_{1i} liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(C, R)$

oder

$$\sum_{k=0}^N \left[\underline{v}_i(k) + \underline{K}_i \underline{e}_i(k) \right] \underline{e}_i(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (3.12)$$

d. h.

$H_{1i} + \underline{K}_i$ ist schwach positiv

erfüllen. Wie im weiteren noch gezeigt wird, lassen sich diese Sektoreigenschaften auch für die leistungsfähigen Adaptionsverfahren nach der Methode der kleinsten Fehler-

quadrate nachweisen, wenn die Algorithmen geeignet modifiziert werden. Kenntnisse über bestimmte Parameter der Regelstrecke sind nicht notwendig und es werden lediglich die Eingangs- und Ausgangssignale der Regelstrecke verwendet. Im folgenden sollen die Sektoreigenschaften für einige Adaptionsgesetze abgeleitet werden. Da alle Elemente des diagonalen Operators $\underline{H}_1$ und damit alle Adaptionsalgorithmen getrennt voneinander betrachtet werden können, wird der Index i an allen Parametern und Signalen der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Das Adaptionsfehlersignal wird allgemein mit $e(k)$ bezeichnet.

Der Algorithmus der stochastischen Approximation (STA) (Hahn, 1983)

Der Algorithmus wird durch die Gleichungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + f(k) \underline{F} \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.13)$$

$$f(k)^{-1} = f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) + f_3 \quad (3.14)$$

$$0 < f_1 < 1, \quad f_2 > 0, \quad f_3 > 0 \quad (3.15)$$

$$\underline{F} > \underline{0}, \quad 0 < f(0) \leq f_3^{-1} (1-f_1) \quad (3.16)$$

beschrieben. Die Matrix $\underline{F}$ ist positiv definit, $\hat{\underline{p}}(k)$ ist der Parametervektor der Reglerparameter und $\underline{x}(k-d)$ der zugehörige Signalvektor. Aus der Ljapunowfunktion

$$\begin{aligned} V(k) &= [\hat{\underline{p}}(k) - \underline{p}]^T \underline{F}^{-1} [\hat{\underline{p}}(k) - \underline{p}] f(k)^{-1} \\ &= \tilde{\underline{p}}(k)^T \underline{F}^{-1} \tilde{\underline{p}}(k) f(k)^{-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ergibt sich nach Einsetzen der modifizierten Gl.(3.13)

$$\tilde{\underline{p}}(k) = \tilde{\underline{p}}(k-d-1) + f(k) \underline{F} \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.18)$$

für das Inkrement der Ljapunowfunktion

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &= [f(k)^{-1} - f(k-d-1)^{-1}] \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T \underline{F}^{-1} \tilde{\underline{p}}(k-d-1) \\ &\quad + 2\tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d) e(k) + f(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) e^2(k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

und daraus mit Gl.(3.14)

$$\begin{aligned}
V(k) - V(k-d-1) + [1 - f_1 - f_3 f(k-d-1)] V(k-d-1) \\
= f_2 \tilde{p}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \tilde{p}(k-d-1) + 2\tilde{p}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d) e(k) \\
+ f(k) e^2(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) .
\end{aligned} \quad (3.20)$$

Der Ausdruck $\tilde{p}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d)$ in Gl.(3.20) beschreibt nach Gl.(3.1) genau den Parameterfehlervektor $v(k)$. Damit kann Gl.(3.20) auch in der Form

$$\begin{aligned}
V(k) - V(k-d-1) + [1 - f_1 - f_3 f(k-d-1)] V(k-d-1) \\
= f_2 v^2(k) + 2v(k) e(k) + f(k) e^2(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) \\
= f_2 [v(k) + f_2^{-1} e(k)]^2 + e^2(k) [f(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) - f_2^{-1}] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

angegeben werden. Werden die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gl.(3.21) über alle Zeitpunkte $k = 0$ bis N aufsummiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) + [1 - f_1 - f_3 f(k-d-1)] V(k-d-1) \\
= f_2 \sum_{k=0}^N [v(k) + f_2^{-1} e(k)]^2 - f_2 \sum_{k=0}^N R^2 e^2(k)
\end{aligned} \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned}
R^2 &= f_2^{-2} [1 - f_2 f(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)] \\
&= f_2^{-2} \frac{f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_3}{f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + f_3} .
\end{aligned} \quad (3.23)$$

In der Summe auf der linken Seite von Gl.(3.22) heben sich die meisten Terme gegenseitig auf

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) &= V(N) + V(N-1) + \dots + V(N-d) \\
&\quad - V(-1) - V(-2) - \dots - V(-d-1) .
\end{aligned} \quad (3.24)$$

Ist dann der zweite Term in der linken Summe größer oder gleich Null

$$1 - f_1 - f_3 f(k-d-1) \geq 0 , \quad (3.25)$$

so ergibt sich sofort die Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N [v(k) + f_2^{-1} e(k)]^2 - \sum_{k=0}^N R^2 e^2(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (3.26)$$

bzw.

H_1 liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(-f_2^{-1}, R)$,

wobei der Faktor γ_0^2 eine positive, von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante

$$\gamma_0^2 = f_2^{-1} [V(-1) + V(-2) + \dots + V(-d-1)] \quad (3.27)$$

darstellt. Zum Beweis von Gl.(3.25) sei zunächst angenommen, daß die Ungleichung

$$f(k-d-1) \leq \frac{1-f_1}{f_3} \quad (3.28)$$

erfüllt sei. Aus Gl.(3.14) folgt dann

$$\begin{aligned} f(k)^{-1} &\geq f_1 \frac{f_3}{1-f_1} + f_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) + f_3 \\ &= \frac{f_3}{1-f_1} + f_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) \end{aligned} \quad (3.29)$$

und damit

$$f(k) \leq \frac{1-f_1}{f_3} . \quad (3.30)$$

Wird also als Anfangswert von $f(k)$ ein Wert

$$f(0) \leq \frac{1-f_1}{f_3} \quad (3.31)$$

gewählt, dann bleibt $f(k)$ für alle Zeitpunkte k beschränkt, und es gilt

$$1 - f_1 - f_3 f(k-d-1) \geq 0 . \quad (3.32)$$

Der rekursive Least-Squares-Algorithmus (RLS)

Die Gleichungen für den RLS-Algorithmus lauten

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + \underline{F}(k) \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.33)$$

$$\underline{E}(k)^{-1} = f_1 \underline{E}(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \quad (3.34)$$

$$0 \leq f_1 \leq 1, \quad f_2 > 0, \quad \underline{E}(0) \geq \underline{0}. \quad (3.35)$$

Mit der Ljapunowfunktion

$$V(k) = \tilde{\underline{p}}(k)^T \underline{E}(k)^{-1} \tilde{\underline{p}}(k) \quad (3.36)$$

erhält man nach Einsetzen von Gl.(3.33)

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &= \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T [\underline{E}(k)^{-1} - \underline{E}(k-d-1)^{-1}] \tilde{\underline{p}}(k-d-1) \\ &\quad + 2 \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d) e(k) + e^2(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) \end{aligned} \quad (3.37)$$

und daraus mit Gl.(3.34)

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &+ (1-f_1) V(k-d-1) \\ &= f_2 \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^{-1} \underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \tilde{\underline{p}}(k-d-1) + 2 \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T \underline{x}(k-d) \\ &\quad + e^2(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mit der Definitionsgleichung (3.1) für den Parametervektor $v(k)$ gilt dann auch

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &+ (1-f_1) V(k-d-1) \\ &= f_2 v^2(k) + 2v(k) e(k) + e^2(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) \\ &= f_2 [v(k) + f_2^{-1} e(k)]^2 - f_2 R^2 e(k)^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

mit

$$R^2 = f_2^{-2} [1 - f_2 \underline{x}^T(k-d) \underline{E}(k) \underline{x}(k-d)]. \quad (3.40)$$

Die Sektoreigenschaft für den RLS-Algorithmus ergibt sich durch Summation der Ausdrücke auf beiden Seiten von Gl.(3.39) über alle Zeitpunkte k

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) &+ (1-f_1) V(k-d-1) \\ &= f_2 \sum_{k=0}^N [v(k) + f_2^{-1} e(k)]^2 - R^2 \sum_{k=0}^N e(k)^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Genau wie bei der Ableitung der Sektoreigenschaften für den STA-Algorithmus heben sich die meisten Terme auf der linken Seite von Gl.(3.41) heraus (vgl. Gl.(3.24)). Unter der Bedingung (3.35)

$$0 \leq f_1 \leq 1$$

ist der zweite Term in der linken Summe größer oder gleich Null, so daß sich für die Sektoreigenschaft die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^N [v(k) + e(k)]^2 - \sum_{k=0}^N R^2 e^2(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (3.42)$$

d. h.

H_1 liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(-1, R)$

ergibt. Über den Radius R ist nach Gl.(3.40) zunächst keine Aussage möglich. Wendet man auf Gl.(3.34) das Matrizeninversionslemma

$$[A + B C D]^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [C^{-1} + D A^{-1} B]^{-1} D A^{-1} \quad (3.43)$$

an, so ergibt sich

$$\underline{E}(k) = f_1^{-1} \underline{E}(k-d-1) \left[I - \frac{\underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1)}{f_1 f_2^{-1} + \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)} \right] \quad (3.44)$$

oder nach Multiplikation mit $\underline{x}(k-d)$ auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} & \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) \\ &= f_1^{-1} \underline{x}^T(k-d) \underline{E}(k-d-1) \left[\underline{x}(k-d) - \frac{\underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)}{f_1 f_2^{-1} + \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)} \right] \\ &= f_1^{-1} \left[\underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d) - \frac{(\underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d))^2}{f_1 f_2^{-1} + \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)} \right] \\ &= f_2^{-1} \frac{\underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)}{f_1 f_2^{-1} + \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Einsetzen von Gl.(3.45) in Gl.(3.40) führt dann auf

$$R^2 = f_2^{-2} \left[1 + f_2 f_1^{-1} \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d) \right]^{-1}. \quad (3.46)$$

Die Sektoreigenschaften beider Adaptionsgesetze können in folgendem Satz zusammengefaßt werden:

Satz 3.1 Der Operator H_1 beschreibe den Zusammenhang zwischen dem Parameterfehlersignal $v(k)$ und dem Adaptionsfehlersignal $e(k)$

$$v(k) = \tilde{\mathbf{p}}_1^T(k-d-1) \mathbf{x}(k-d) = H_1 e(k) . \quad (3.47)$$

Die Adaptionsalgorithmen STA und RLS besitzen die Sektoreigenschaft

H_1 liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(C, R)$

mit

$$C = \begin{cases} -f_2^{-1} & \text{für den STA - Algorithmus} \\ -1 & \text{für den RLS - Algorithmus} \end{cases} \quad (3.48)$$

und

$$R = \begin{cases} \text{Gl.(3.23)} & \text{für den STA - Algorithmus} \\ \text{Gl.(3.46)} & \text{für den RLS - Algorithmus} \end{cases} \quad (3.49)$$

$$0 < R < |C| .$$

Zur Stabilitätsanalyse des Fehlermodells für den adaptiven Grundregelkreises nach Bild 2.6 kann das Sektor-Stabilitätstheorem A.2 nach Anhang A herangezogen werden. Als Bedingung für die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ im Rückwärtszweig ergibt sich

$$\underline{H}_2(z) \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K_a(\underline{C}', \underline{R}') ,$$

wobei die Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ nach Gl.(A.128) berechnet werden. Diese Bedingung ist aber nur überprüfbar, wenn der Radius R ein gewisses Mindestmaß $R_{\min}$ nicht unterschreitet. Da in Gleichung (3.49) der Radius von dem Signalvektor $\mathbf{x}(k)$ des adaptiven Regelkreises abhängt, ist die Angabe eines Mindestradius $R_{\min}$ nicht möglich. Damit ist Satz 3.1 zur Stabilitätsanalyse des Fehlermodells nach Bild 2.7 nicht geeignet. Im folgenden wird gezeigt, daß durch die Einführung geeigneter zeitvarianter Gewichtungsfaktoren für die Signale des adaptiven Regelkreises dieses Problem umgangen werden kann.

3.2. Adaptionalgorithmen mit gewichteten Signalen

Zu den ersten Arbeiten, die sich mit dem Nachweis von Sektoreigenschaften für Adaptionalgorithmen beschäftigen, zählen die Arbeiten von Gawthrop (1980), und Ortega und Landau (1983a,b). Ein wichtiges Ergebnis dieses Arbeiten ist, daß prinzipiell Sektorgrenzen C und R für den Operator H_{1i} angegeben werden können. Jedoch sind diese Grenzen genau so wie im Kapitel 3.1 für die Algorithmen STA und RLS gezeigt, von den Signalen des adaptiven Regelkreises abhängig. Eine Angabe konstanter Sektorgrenzen ist für den Operator H_{1i} nicht möglich. Erst in den weiterführenden Arbeiten von Ortega, Praly und Landau (1985) und Praly (1984) wurde gezeigt, daß sich für ein transformiertes Fehlermodell Sektoreigenschaften mit konstanten Sektorgrenzen angeben lassen. Betrachtet wird dann nicht mehr das Fehlermodell nach Bild 2.7 sondern ein transformiertes Fehlermodell, das sich durch die Einführung geeigneter zeitvarianter Gewichtungsfaktoren $r_i(k)$ für die Signale ergibt,

$$r_i(k)^{-1} = r_{1i} r_i(k-1)^{-1} + r_{3i} g_i(k) + r_{3i} \quad (3.50a)$$

Definiert man die Signale

$$v_i'(k) = \sqrt{r_i(k)} v_i(k) \quad (3.50b)$$

$$e_i'(k) = \sqrt{r_i(k)} e_i(k) \quad (3.50c)$$

$$e_i^{**}(k) = \sqrt{r_i(k)} e_i^*(k) \quad (3.50d)$$

$$\underline{x}_i'(k-d_i) = \sqrt{r_i(k)} \underline{x}_i(k-d_i) \quad (3.50e)$$

so wird die Beziehung zwischen dem gewichteten Parameterfehler $\underline{v}'(k)$ und dem gewichteten Adaptionfehler $\underline{e}'(k)$ durch den Operator $\underline{H}'_1$ in der Form

$$\begin{aligned} v_i'(k) &= \tilde{p}_i'(k-d_i-1)^T \underline{x}_i'(k-d_i) = H'_{1i} e_i'(k) \\ \underline{v}'(k) &= \underline{H}'_1 \underline{e}(k) \quad , \quad \underline{H}'_1 = \text{diag} \left\{ H'_{1i} \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

beschrieben. Anstelle des Fehlermodells nach Bild 2.7 wird das transformierte Fehlermodell nach Bild 3.2 zur Stabilitätsanalyse verwendet,

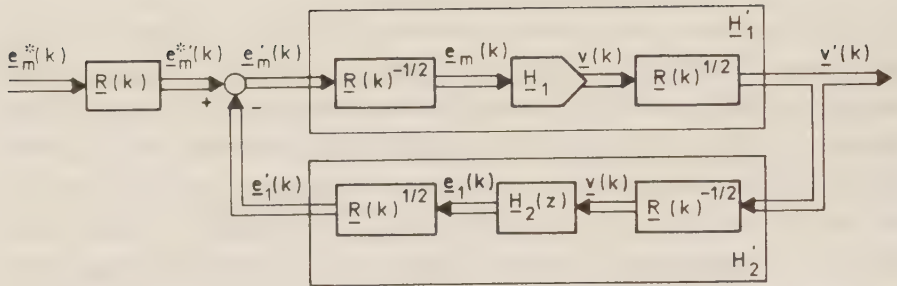


Bild 3.2 Das transformierte Fehlermodell mit gewichteten Signalen

wobei der Operator $\underline{R}(k)$

$$\underline{R}(k) = \text{diag} \left\{ r_i(k) \right\} \quad , \quad i = 1, \dots, q \quad (3.52)$$

gerade durch die Transformationsbeziehungen nach Gl.(3.50) gegeben ist. $\underline{R}(k)^{-1}$ beschreibt dann die inverse Abbildung. Im folgenden sollen für den transformierten Operator H'_{1i} die Sektoreigenschaften verschiedener Adaptionsgesetze abgeleitet werden.

Der Faktor $g_i(k)$ in der Gl.(3.50a) zur rekursiven Berechnung von $r_i(k)$ stellt im allgemeinen Fall eine beliebige positive Funktion dar, die von den Signalen im Signalvektor $\underline{x}_i(k)$ abhängt. Deshalb wird $r_i(k)$ in der Literatur (Ortega, Praly und Landau, 1985) auch als Signalnormierungsfaktor bezeichnet. $r_i(k)$ ist beschränkt, wenn der Anfangswert $r_i(0)$ nach

$$r_i(0) \leq r_3^{-1} (1 - r_1) \quad (3.53a)$$

gewählt wird. Ist nämlich Gl.(3.53a) zu irgendeinem Zeitpunkt $k-1$ erfüllt, so ergibt sich durch Einsetzen in Gl.(3.50a) für $g_i(k-1) \geq 0$

$$r_i(k)^{-1} \geq f_1 \frac{f_3}{1 - f_1} + f_3 \quad (3.53b)$$

und damit

$$r_1(k) \leq r_3^{-1} (1 - r_1) . \quad (3.53c)$$

Der Einfachheit halber wird im weiteren der Index i an allen Parametern und Signalen weggelassen.

Der gewichtete fixed-gain-Algorithmus (WFG)

Der gewichtete fixed-gain-Algorithmus ist durch die Gleichungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + r(k) \underline{E} \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.54)$$

$$r(k)^{-1} = r_1 r(k-1)^{-1} + r_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + r_3 \quad (3.55)$$

$$0 < r_1 < 1, \quad r_2 > 0, \quad r_3 > 0, \quad \underline{E} \geq 0, \quad 0 < r(0) \leq r_3^{-1} (1 - r_1) \quad (3.56)$$

oder mit Gl.(3.50a-e) durch

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + \underline{E} \underline{x}'(k-d) e'(k) \quad (3.57)$$

gegeben. Durch Einsetzen der Gl.(3.57) in die Ljapunowfunktion $V(k)$

$$V(k) = \tilde{\underline{p}}(k)^T \underline{E}^{-1} \tilde{\underline{p}}(k) \quad (3.58)$$

erhält man mit Gl.(3.51)

$$V(k) - V(k-d-1) = 2 \underline{v}'(k) e'(k) + \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) e'^2(k) \quad (3.59)$$

und nach Summation über alle Zeitpunkte k

$$\sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) = 2 \sum_{k=0}^N \left[\underline{v}'(k) + \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) e'(k) \right] e'(k). \quad (3.60)$$

In der linken Summe von Gl.(3.60) heben sich wieder die meisten Ausdrücke gegenseitig auf. Mit Gl.(3.24) lautet dann die Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N \left[\underline{v}'(k) + K e'(k) \right] e'(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (3.61)$$

mit

$$\begin{aligned} K &= 0.5 r_2^{-1} \geq 0.5 \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) \\ &= 0.5 r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2r_2} \frac{\underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)}{r_1 r_2^{-1} r(k-1)^{-1} + r_3 r_2^{-1} + \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)} \quad (3.62)$$

und

$$\gamma_0^2 = 0.5 \left[V(-1) + V(-2) + \dots + V(-d-1) \right]. \quad (3.63)$$

Die Gl.(3.61) beschreibt nach Gl.(A.65d) die Sektoreigenschaft

$$H'_1 + 0.5 r_2^{-1} \text{ ist schwach positiv.}$$

Der Algorithmus der gewichteten stochastischen Approximation (WSTA)

Der WSTA-Algorithmus wird durch die Gleichungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + r(k) f(k) \underline{E} \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.64)$$

$$f(k)^{-1} = f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + f_3 \quad (3.65)$$

$$r(k)^{-1} = r_1 r(k-1)^{-1} + r_2 f(k-d-1) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + r_3 \quad (3.66)$$

$$\underline{E} > 0, \quad 0 < f_1 < 1, \quad f_2 > 0, \quad f_3 > 0, \quad (3.76)$$

$$0 < f(0) \leq f_3^{-1} (1 - f_1), \quad (3.68)$$

$$0 < r_1 < 1, \quad r_2 > 0, \quad r_3 > 0, \quad (3.69)$$

$$0 < r(0) \leq f_3^{-1} (1 - r_1) \quad (3.70)$$

oder mit Gl.(3.50a-e) durch

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + f(k) \underline{E} \underline{x}'(k-d) e'(k) \quad (3.71)$$

$$f(k)^{-1} = f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) + f_3 \quad (3.72)$$

beschrieben. Die Gl.(3.71) und (3.72) stimmen formal mit den Gl.(3.13) und (3.14) überein. Die Ableitung der Sektoreigenschaften kann formal genau so wie für den STA-Algorithmus durchgeführt werden. Es ergibt sich die zu Gl.(3.26) analoge Beziehung

$$\sum_{k=0}^N \left[v'(k) + f_2^{-1} e'(k) \right]^2 - \sum_{k=0}^N R^2 e'^2(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (3.73)$$

d. h.

H'_1 liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(-f_2^{-1}, R)$

mit

$$R^2 = f_2^{-2} \left[1 - f_2 f(k) \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) \right]. \quad (3.74)$$

Der Radius R in Gl.(3.74) hängt im Gegensatz zu Gl.(3.23) nicht von dem Signalvektor $\underline{x}(k-d)$, sondern von dem transformierten Signalvektor $\underline{x}'(k-d)$ ab. Dadurch ist eine Abschätzung von $R_{\min} \leq R$ möglich. Dies soll im folgenden gezeigt werden. Ersetzt man in Gl.(3.74) die Ausdrücke $\underline{x}'(k-d)$ durch Gl.(3.50e) und $r(k)$ und $f(k)$ durch die Gln.(3.65) und (3.66), so erhält man

$$\begin{aligned} R^2 &= f_2^{-2} \left[1 - \frac{f_2 r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)}{f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + f_3} \right] \\ &= f_2^{-2} \left[\frac{f_1 + f_3 f(k-d-1)}{f_1 + f_3 f(k-d-1) + f_2 f(k-d-1) r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)} \right]. \quad (3.75) \end{aligned}$$

Für den dritten Summanden im Nenner von Gl.(3.75) kann die Abschätzung

$$\begin{aligned} &f(k-d-1) r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) \\ &= \frac{f(k-d-1) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d)}{r_1 r(k-1)^{-1} + r_2 f(k-d-1) \underline{x}(k-d)^T \underline{E} \underline{x}(k-d) + r_3} \leq r_2^{-1} \end{aligned} \quad (3.76)$$

angegeben werden. Dann gilt

$$R^2 \geq f_2^{-2} \frac{1}{1 + f_2 r_2^{-1} [f_1 + f_3 f(k-d-1)]^{-1}}. \quad (3.77)$$

Bei der Ableitung der Sektoreigenschaften des STA-Algorithmus wurde gezeigt, daß $f(k)$ beschränkt bleibt. Aus Gl.(3.28) folgt dann

$$f_1 < f_1 + f_3 f(k-d-1) \leq 1 \quad (3.78)$$

und damit für den Radius

$$R^2 > f_2^{-2} \frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2}. \quad (3.79)$$

Die Sektoreigenschaft für den WSTA-Algorithmus lautet dann

$$H'_1 \text{ liegt schwach außerhalb des Kreises } K_a \left(-f_2^{-1}, f_2^{-1} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2}} \right).$$

Der gewichtete RLS-Algorithmus (WRLS)

Durch die Gleichungen

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + r(k) \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) e(k) \quad (3.80)$$

$$\underline{E}(k)^{-1} = f'_1 \underline{E}(k-d-1)^{-1} + f_2 r(k) \underline{x}(k-d) \underline{x}(k-d)^T \quad (3.81)$$

$$r(k)^{-1} = r_1 r(k-1)^{-1} + r_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d) \underline{x}(k-d) + r_3. \quad (3.82)$$

$$f'_1 = \begin{cases} f_1 + f_3 \text{ Spur} \{ \underline{E}(k-d-1) \} & f'_1 \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.83)$$

$$0 < r_1 < 1, \quad r_2 > 0, \quad r_3 > 0 \quad (3.84)$$

$$0 < r(0) < r_3^{-1} (1 - r_1) \quad (3.85)$$

$$f_2 > 0, \quad 0 < f_1 \leq 1 \quad (3.86)$$

$$\underline{E}(0) > 0, \quad \lambda_{\max} \{ \underline{E}(0) \} \leq f_3^{-1} (1 - f_1) \quad (3.87)$$

oder mit Gl.(3.60)

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + \underline{E}(k) \underline{x}'(k-d) e'(k) \quad (3.88)$$

$$\underline{E}(k)^{-1} = f'_1 \underline{E}(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \quad (3.89)$$

ist der WRLS-Algorithmus bestimmt. Der zeitvariante Gewichtungsfaktor f'_1 wird nach Gl.(3.83) so berechnet, daß der maximale Eigenwert der Matrix $\underline{E}(k)$ für alle Zeitpunkte k beschränkt bleibt, wenn der Anfangswert $\underline{E}(0)$ nach Gl.(3.87) bestimmt wird. Zum Beweis dieser Aussage wird zunächst vorausgesetzt, daß

$$\lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \} \leq \frac{1 - f_1}{f_3} \quad (3.90)$$

und

$$\text{Spur} \left\{ \underline{E}(k-d-1) \right\} \leq \frac{1 - f_1}{f_3} . \quad (3.91)$$

Da für den minimalen Eigenwert der inversen Matrix die Beziehung (Steward, 1973, Seite 266)

$$\lambda_{\min} \left\{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \right\} = \lambda_{\max} \left\{ \underline{E}(k-d-1) \right\}^{-1} \quad (3.92)$$

gilt, ergibt sich mit Gl.(3.90)

$$\lambda_{\min} \left\{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \right\} \geq \frac{f_3}{1 - f_1} . \quad (3.93)$$

Für hermitesche Matrizen gilt das Minimax-Theorem (Steward, 1973, Seite 315)

$$\lambda_{\min} \left\{ \underline{A} + \underline{B} \right\} \geq \lambda_{\min} \left\{ \underline{A} \right\} + \lambda_{\min} \left\{ \underline{B} \right\} . \quad (3.94)$$

Durch Anwendung von Gl.(3.94) auf die Gl.(3.81) kann eine Abschätzung des minimalen Eigenwertes der Matrix $\underline{E}(k)^{-1}$ durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left\{ \underline{E}(k)^{-1} \right\} &\geq f_1 \lambda_{\min} \left\{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \right\} \\ &\quad + f_3 \text{ Spur} \left\{ \underline{E}(k-d-1) \right\} \lambda_{\min} \left\{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \right\} \\ &\quad + f_2 \lambda_{\min} \left\{ \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \right\} . \end{aligned} \quad (3.95)$$

Für die Spur einer Matrix gilt

$$\text{Spur} \left\{ \underline{E}(k-d-1) \right\} \geq \lambda_{\max} \left\{ \underline{E}(k-d-1) \right\} . \quad (3.96)$$

Damit ergibt sich als Abschätzung für Gl.(3.95)

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left\{ \underline{F}(k)^{-1} \right\} &\geq f_1 \frac{f_3}{1 - f_1} + f_3 + f_2 \lambda_{\min} \left\{ \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \right\} \\ &= \frac{f_3}{1 - f_1} + f_2 \lambda_{\min} \left\{ \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \right\} . \end{aligned} \quad (3.97)$$

Der zweite Summand in Gl.(3.97) stellt ein dyadisches Produkt dar, das nur positive Eigenwerte besitzt. Dann gilt

$$\lambda_{\min} \{ \underline{F}(k) \}^{-1} \geq \frac{f_3}{1 - f_1} \quad (3.98)$$

oder mit Gl.(3.92)

$$\lambda_{\max} \{ \underline{F}(k) \} \leq \frac{1 - f_1}{f_3}, \quad (3.99)$$

d. h. ist der maximale Eigenwert von $\underline{F}(k)$ zu irgendeinem Zeitpunkt kleiner als der Wert $f_3^{-1}(1-f_1)$, so bleibt er auch für alle folgenden Zeitpunkte kleiner als dieser Wert. Diese Aussage gilt zunächst unter der Bedingung nach Gl.(3.91). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird f^* nach Gl.(3.83) auf den Wert 1 gesetzt. Damit gilt aber nach Gl.(3.89) auch für diesen Fall

$$\underline{F}(k)^{-1} \geq \underline{F}(k-d-1)^{-1} \quad (3.100)$$

bzw.

$$\lambda_{\max} \{ \underline{F}(k) \} \leq \lambda_{\max} \{ \underline{F}(k-d-1) \} < \frac{1 - f_1}{f_3}. \quad (3.101)$$

Wird also der Anfangswert $\underline{F}(0)$ so gewählt, daß Gl.(3.99) erfüllt ist, so bleibt diese Bedingung auch für alle folgenden Zeitpunkte erfüllt.

Die Gln.(3.88) und (3.89) entsprechen formal den Gln.(3.33) und (3.34) des RLS-Algorithmus. Die Ableitung der Sektoreigenschaften führt dann auf die zu Gl.(3.41) analoge Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) + (1-f_1^*) V(k-d-1) \\ = f_2 \sum_{k=0}^N [v'(k) + f_2^{-1} e'(k)]^2 - R^2 e'(k)^2. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Nach Gl.(3.83) ist der Ausdruck $(1-f_1^*)$ immer größer oder gleich Null. Dann folgt als Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N [v'(k) + f_2^{-1} e'(k)]^2 - R^2 e'(k)^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (3.103)$$

d. h.

H_1^* liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(-f_2^{-1}, R)$.

Für den Radius gilt in Analogie zu Gln.(3.40) und (3.46)

$$R^2 = f_2^{-2} [1 + f_2 f_1'^{-1} \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}'(k-d)]^{-1}. \quad (3.104)$$

Um konstante Kreissektoren für die Sektoreigenschaft nach Gl.(3.103) zu erhalten, muß für den Radius nach Gl.(3.104) die folgende Abschätzung durchgeführt werden. Nach Gl.(3.83) gilt

$$f'_1 \geq f_1.$$

Damit folgt aus Gl.(3.104)

$$R^2 \geq f_2^{-2} \frac{1}{1 + f_2 f_1'^{-1} \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}'(k-d)}. \quad (3.106)$$

Wird in Gl.(3.106) die folgende Abschätzung eingesetzt

$$\begin{aligned} & \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}'(k-d) \\ &= \frac{\underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d)}{r_1 r(k-1)^{-1} + r_2 \underline{x}(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}(k-d) + r_3} \leq r_2^{-1}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

so ergibt sich für den Radius

$$R^2 \geq f_2^{-2} \frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2} \quad (3.108)$$

und damit die Sektoreigenschaft

$$H'_1 \text{ liegt schwach außerhalb des Kreises } K_a \left(-f_2^{-1}, f_2^{-1} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2}} \right).$$

Die Sektoreigenschaften der gewichteten Adaptionalgorithmen werden im folgenden Satz zusammengefaßt.

Satz 3.2 : Der Operator H'_1 beschreibe den Zusammenhang zwischen dem transformierten Parameterfehler $v'(k)$ und dem transformierten Adaptionsfehler $e'(k)$

$$v'(k) = \hat{p}(k-d-1)^T \underline{x}'(k-d) = H'_1 e'(k) . \quad (3.109)$$

Die Adaptionsalgorithmen WFG, WSTA und WRLS besitzen folgende Sektoreigenschaften

WFG : $H'_1 + K$ ist schwach positiv
 $K = 0.5 r_2^{-1}$

WSTA , WRLS : H'_1 liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(C,R)$

$$C = -f_2^{-1}$$

$$R = f_2^{-1} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2}} .$$

Satz 3.2 beschreibt die Sektoreigenschaften der drei Adaptionsalgorithmen WFG, WSTA und WRLS bezüglich der L_{2e} -Norm der Signale (siehe Gl.(A.67a) im Anhang A). Wird Satz 3.2 zusammen mit dem Sektor-Stabilitätstheorem A.2 oder A.3 nach Anhang A zur Stabilitätsanalyse des transformierten Fehlermodell nach Bild 3.2 verwendet, so ergibt sich eine Aussage über die L_2 -Stabilität der transformierten Signale $\underline{v}'(k)$ und $\underline{e}'(k)$. Für viele Anwendungsfälle ist eine Aussage über die L_∞ -Stabilität (siehe Definition A.24, Gl.(A.96)) von größerer Bedeutung. Nach Satz A.5 (Anhang A) existiert ein Zusammenhang zwischen der L_2 -Stabilität und der L_∞ -Stabilität. Danach ist ein System L_∞ -stabil, wenn das zugehörige exponentiell gewichtete System (vgl. Bild A.4, Anhang A) exponentiell L_2 -stabil ist. Im folgenden Kapitel wird deshalb eine zusätzliche exponentielle Gewichtung der Signale des Fehlermodells eingeführt.

3.3. Adaptionsalgorithmen mit exponentiell gewichteten Signalen

In diesem Kapitel werden die transformierten Signale nach Kapitel 3.2 mit einer zusätzlichen exponentiellen Gewichtung $\sqrt{a}^{-k}$ betrachtet

$$v_i^n(k) = \sqrt{a^{-k}} v_i'(k) = \sqrt{a^{-k} r_i(k)} v_i(k) \quad (3.109a)$$

$$e_i^n(k) = \sqrt{a^{-k}} e_i'(k) = \sqrt{a^{-k} r_i(k)} e_i(k) \quad (3.109b)$$

$$e_i^{*n}(k) = \sqrt{a^{-k}} e_i^{*'}(k) = \sqrt{a^{-k} r_i(k)} e_i^{*}(k) \quad (3.109c)$$

$$\underline{x}_i^n(k-d_i) = \sqrt{a^{-k}} \underline{x}_i'(k-d_i) = \sqrt{a^{-k} r_i(k)} \underline{x}_i'(k-d_i) \quad (3.109d)$$

mit

$$0 < a < 1. \quad (3.110)$$

Ein Blockschaltbild des exponentiell gewichteten Operators $\underline{H}_1^n$

$$\underline{y}^n(k) = \underline{H}_1^n e^n(k) \quad (3.111a)$$

mit

$$\underline{H}_1^n = \text{diag} \left\{ H_{1i}^n \right\}, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.111b)$$

$$v_i^n(k) = \tilde{\underline{p}}(k-d_i-1)^T \underline{x}^n(k-d_i) = H_{1i}^n e_i(k) \quad (3.111c)$$

ist im Bild 3.3 und das gesamte transformierte Fehlermodell im Bild 3.4 dargestellt.

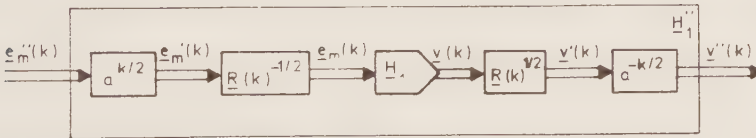


Bild 3.3 Zur Definition des Operators $\underline{H}_1^n$

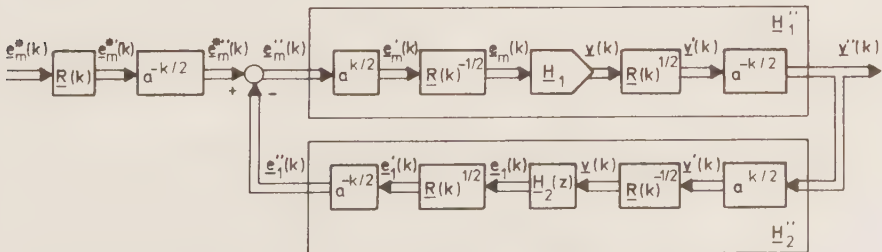


Bild 3.4 Das transformierte Fehlermodell mit exponentiell gewichteten Signalen

Der Algorithmus der gewichteten stochastischen Approximation (WSTA)

Der Algorithmus WSTA ist durch die Gleichung

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-d-1) + f(k) \underline{E} \underline{x}'(k-d) e'(k) \quad (3.112)$$

und Gl.(3.72) gegeben. Mit der Ljapunowfunktion

$$V(k) = \tilde{\underline{p}}(k)^T \underline{E}^{-1} \tilde{\underline{p}}(k) f(k)^{-1} a^{-k} \quad (3.113)$$

erhält man

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &= \tilde{\underline{p}}(k-d-1) \underline{E}^{-1} \tilde{\underline{p}}(k-d-1) a^{-k} [f(k)^{-1} - a^{d+1} f(k-d-1)^{-1}] \\ &\quad + 2v''(k) e''(k) + f(k) \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) e''^2(k) \end{aligned} \quad (3.114)$$

und mit Gl.(3.72)

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &+ [1 - (f_1 + f_3 f(k-d-1)) a^{-d-1}] V(k-d-1) \\ &= f_2 v''(k)^2 + 2 v''(k) e''(k) + f(k) \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d) e''^2(k). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Zur Ableitung der Sektoreigenschaft muß ein a , $0 < a < 1$ existieren, so daß die Ungleichung

$$1 - [f_1 + f_3 f(k-d-1)] a^{-d-1} \geq 0 \quad (3.116)$$

erfüllt ist. In diesem Fall ergibt sich die Sektoreigenschaft aus Gl.(3.115) durch Summation über alle Zeitpunkte k . Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N V(k) - V(k-d-1) &+ [1 - (f_1 + f_3 f(k-d-1)) a^{-d-1}] V(k-d-1) \\ &= f_2 \sum_{k=0}^N [v''(k) + f_2^{-1} e''(k)]^2 \\ &\quad - [f_2^{-1} - f(k) \underline{x}'(k-d)^T \underline{E} \underline{x}'(k-d)] e''(k)^2 \\ &\geq -V(-1) - V(-2) - \dots - V(-d-1) \end{aligned} \quad (3.117)$$

folgt die Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N [v''(k) - f_2^{-1} e''(k)]^2 - \sum_{k=0}^N R^2 e''(k)^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (3.118)$$

mit

$$\gamma_0^2 = f_2^{-2} [V(-1) + V(-2) + \dots + V(-d-1)] \quad (3.119)$$

$$R^2 = f_2^{-2} [1 - f_2 f(k) \underline{x}'(k-d)^T \underline{F} \underline{x}'(k-d)] \quad (3.120)$$

Die Gln. (3.120) und (3.74) stimmen überein. Dann kann mit Gl.(3.75) für R^2 die folgende Abschätzung angegeben werden

$$R^2 > f_2^{-2} \frac{r_2 f_1}{r_2 f_1 + f_2} \quad (3.121)$$

Die Sektoreigenschaft für den WSTA-Algorithmus lautet also

$$H_1'' \text{ liegt schwach außerhalb des Kreises } K_a(f_2^{-1}, f_2^{-1} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{r_2 f_1 + f_2}}).$$

Bei der Ableitung der Gl.(3.121) wurde vorausgesetzt, daß Gl.(3.116) für alle Zeitpunkte k erfüllt ist. Wird in Gl.(3.116) die Substitution $k' = k-d-1$ durchgeführt und anschließend k' wieder durch k ersetzt, so ergibt sich mit Gl.(3.72) aus Gl.(3.116)

$$f(k) = [f_1 f(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}'(k-d)^T \underline{F} \underline{x}'(k-d) + f_3]^{-1} \leq \frac{a^{d+1} - f_1}{f_3} \quad (3.122)$$

Nach Gl.(3.30) bleibt $f(k)$ und damit auch $f(k-d-1)$ für alle Zeitpunkte beschränkt, wenn der Anfangswert nach Gl.(3.31) gewählt wird

$$f(k-d-1) \leq \frac{1 - f_1}{f_3} \quad (3.123)$$

Damit ist Gl.(3.122) und also auch Gl.(3.116) erfüllt, wenn folgende Beziehung gilt

$$\begin{aligned} \underline{x}'(k-d)^T \underline{F} \underline{x}'(k-d) &= r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) \\ &\geq \frac{f_3 (1 - a^{d+1})}{(1 - f_1) (a^{d+1} - f_1) f_2} = k_0 \end{aligned} \quad (3.124)$$

Durch geeignete Wahl der Konstante a nach Gl.(3.110) kann der Wert k_0 beliebig klein werden. Im weiteren wird zur Abschätzung des Ausdruck $r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d)$ die nichtrekursive Beschreibungsform des Faktors $r(k)$ benötigt. Aus Gl.(3.66) folgt mit $r_1 \neq 0$

$$r(k)^{-1} r_1^{-k} - r(k-1) r_1^{-(k-1)} = r_2 g(k) r_1^{-k} + r_3 r_1^{-k} \quad (3.125a)$$

mit

$$g(k) = \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) f(k-d-1) \quad (3.125b)$$

und daraus durch Summation über beide Seiten von Gl.(3.125a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N [r_2 g(k) + r_3] r_1^{-k} &= \sum_{k=0}^N r(k)^{-1} r_1^{-k} - r(k-1) r_1^{-(k-1)} \\ &= r(N)^{-1} r_1^{-N} - r_1^{-1} r_1^0 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Die nichtrekursive Beschreibung des Faktors $r(k)$ lautet also

$$r(N) r_1^N = \left[\sum_{k=0}^N [r_2 g(k) + r_3] r_1^{-k} + r(-1)^{-1} r_1^0 \right]^{-1} \quad (3.127)$$

Einsetzen von Gl.(3.127) in Gl.(3.124) führt dann auf

$$\underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) \geq k_0 \left[\sum_{h=0}^k [r_2 g(k-h) + r_3] r_1^{k-h} + r(-1)^{-1} r_1^{k+1} \right] \quad (3.128)$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{x}(k-d)^T \underline{F} \underline{x}(k-d) &\geq \frac{1}{1-k_1} \left[k_1 \sum_{h=0}^{k-1} [\underline{x}(h-d)^T \underline{F} \underline{x}(h-d)] r_1^{k-h} + k_0 \left(\sum_{h=0}^k r_3 r_1^h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r(-1)^{-1} r_1^{k+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$k_1 = k_0(1-f_1)f_3^{-1}r_2.$$

Gleichung (3.129) beschreibt eine Beziehung, die von der Erregung des adaptiven Regelkreises und von der Wahl der Konstanten r_1 und r_2 abhängt. Für beliebig kleine Werte von k_0 läßt sich bei "genügender" Erregung des adaptiven Regelsystems immer eine Konstante r_1 angeben, so daß Gl.(3.129) und damit Gl.(3.116) erfüllt ist.

Der gewichtete RLS-Algorithmus (WRLS)

Der gewichtete RLS-Algorithmus wird durch die Gln.(3.80) bis (3.87) beschrieben. Anstelle von Gl.(3.83) wird der Faktor f_1 jetzt jedoch nach der Beziehung

$$f_1' = f_1 + f_3 \lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \} \quad (3.130)$$

berechnet. Auch hier wird der zeitvariante Gewichtungsfaktor f_1' so berechnet, daß der maximale Eigenwert der Matrix $\underline{E}(k)$ für alle Zeitpunkte beschränkt bleibt, wenn der Anfangswert $\underline{E}(0)$ nach Gl.(3.87) bestimmt wird. Der Beweis wird in Analogie zu der Ableitung nach Gl.(3.90) bis Gl.(3.99) durchgeführt. Anstelle von Gl.(3.95) ergibt sich jedoch jetzt

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \{ \underline{E}(k-1)^{-1} \} &\geq f_1 \lambda_{\min} \{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \} \\ &\quad + f_3 \lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \} \lambda_{\min} \{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \} \\ &\quad + f_2 \lambda_{\min} \{ \underline{x}'(k-d) \underline{x}(k-d)^T \} \\ &= f_1 \lambda_{\min} \{ \underline{E}(k-d-1)^{-1} \} + f_3 + f_2 \underline{x}'(k-d)^T \underline{x}(k-d) . \end{aligned} \quad (3.131)$$

Aus Gl.(3.131) folgt dann mit Gl.(3.93) sofort Gl.(3.98) und damit Gl.(3.99). Mit der Ljapunowfunktion

$$V(k) = \tilde{\underline{p}}(k)^T \underline{E}(k)^{-1} \tilde{\underline{p}}(k) a^{-k} \quad (3.132)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &= \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T [\underline{E}(k)^{-1} - \underline{E}(k-d-1)^{-1} a^{d+1}] \\ &\quad \tilde{\underline{p}}(k-d-1) a^{-k} + 2 v''(k) e''(k) + \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) e''^2(k) \end{aligned} \quad (3.133)$$

und daraus mit Gl.(3.89)

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-d-1) &+ [1 - f_1' a^{-d-1}] V(k-d-1) \\ &= f_2 v''(k)^2 + 2 v''(k) e''(k) + \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}(k-d) e''^2(k) . \end{aligned} \quad (3.134)$$

Unter der Bedingung

$$1 - \{ f_1 + f_3 \lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \} \} a^{-d-1} \geq 0 \quad (3.135)$$

lautet dann die Sektoreigenschaft

$$\sum_{k=0}^N [v''(k) + f_2^{-1} e''(k)]^2 - \sum_{k=0}^N R^2 e''(k)^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (3.136)$$

mit

$$\gamma_0^2 = f_2^{-1} [V(-1) + V(-2) + \dots + V(-d-1)] \quad (3.137a)$$

$$R^2 = f_2^{-2} [1 - f_2 \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k) \underline{x}'(k-d)] \quad (3.137b)$$

Mit Gl.(3.45) kann in Analogie zu Gl.(3.46) für R^2 auch der Ausdruck

$$R^2 = f_2^{-2} [1 + f_2 f_1'^{-1} \underline{x}'(k-d)^T \underline{E}(k-d-1) \underline{x}'(k-d)]^{-1} \quad (3.138)$$

angegeben werden. Bis auf die unterschiedliche Berechnung des Faktors f_1' stimmt Gl.(3.138) mit Gl.(3.104) überein. Daraus folgt sofort

$$R^2 > f_2^{-2} \frac{r_2 f_1}{r_2 f_1 + f_2} \quad (3.139)$$

Die Sektoreigenschaft für den WRLS-Algorithmus lautet dann

$$H_1'' \text{ liegt schwach außerhalb des Kreises } K_a(f_2^{-1}, f_2^{-1} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{r_2 f_1 + f_2}}).$$

Auch hier müssen noch Bedingungen für die Gültigkeit von Gl.(3.135) angegeben werden. Gl.(3.135) entspricht formal der Gl.(3.116), die bei der Ableitung der Sektoreigenschaft des WSTA-Algorithmus benötigt wird. Anstelle von Gl.(3.122) ergibt sich dann mit der Substitution $k' = k-d-1$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \left\{ \left[(f_1 + f_3 \lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \}) \underline{E}(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \right]^{-1} \right\} \\ \leq f_3^{-1} (a^{d+1} - f_1) \end{aligned} \quad (3.140)$$

wobei k' wieder durch k ersetzt wurde, oder

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left\{ (f_1 + f_3 \lambda_{\max} \{ \underline{E}(k-d-1) \}) \underline{E}(k-d-1)^{-1} + f_2 \underline{x}'(k-d) \underline{x}'(k-d)^T \right\} \\ \geq f_3 (a^{d+1} - f_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Durch Anwendung des Minimax-Theorems (Gl.3.94) auf Gl.(3.141) folgt dann die Bedingung

$$f_1 \lambda_{\min} \{ \underline{E}(k-d-1) \} + f_3 + f_2 \underline{x}'(k-d)^T \underline{x}'(k-d) \geq f_3 (a^{d+1} - f_1)^{-1}. \quad (3.142)$$

Da nach Gl.(3.99) der maximale Eigenwert von $\underline{E}(k)$ für alle Zeitpunkte beschränkt bleibt, wenn der Anfangswert nach Gl.(3.87) gewählt wird, ist Gl.(3.135) erfüllt, wenn folgende Beziehung gilt

$$\begin{aligned} \underline{x}'(k-d)^T \underline{x}'(k-d) &= r(k) \underline{x}(k-d)^T \underline{x}(k-d) \\ &\geq \frac{f_3 (1-a^{d+1})}{(1-f_1)(a^{d+1}-f_1)f_2} = k_0. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Bis auf die Matrix $\underline{E}$ stimmt die Gl.(3.143) mit der Gl.(3.124) überein. Wie bei der Ableitung des WSTA-Algorithmus kann auch hier aus Gl.(3.129) (mit $\underline{E} = \underline{I}$) gefolgert werden, daß die Bedingung (3.143) und damit Gl.(3.135) bei "genügender" Erregung des adaptiven Regelsystems durch geeignete Wahl des Faktors r_1 erfüllt werden kann.

Für den WFG-Algorithmus kann keine Sektoreigenschaft des exponentiell gewichteten Operators H_1^n angegeben werden. Für den Spezialfall $a = 1$ ist seine Sektoreigenschaft jedoch durch Satz 3.2 bestimmt.

Ein Zusammenfassung der Sektoreigenschaften der exponentiell gewichteten Adaptionsalgorithmen gibt der folgende Satz.

Satz 3.3 : Der Operator H_1^n beschreibe den Zusammenhang zwischen dem exponentiell gewichteten, transformierten Parameterfehler $v''(k)$ und dem exponentiell gewichteten, transformierten Adaptionsfehler $e''(k)$

$$v''(k) = \tilde{\underline{p}}(k-d-1)^T \underline{x}''(k-d) = H_1^n e''(k). \quad (3.144)$$

Die Adaptionsalgorithmen WFG, WSTA und WRLS besitzen die Sektoreigenschaften

WFG : $H_1'' + K$ ist schwach positiv
 $K = 0.5 r_2^{-1}$, $a = 1$

WSTA, WRLS : H_1'' liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(C, R)$

$$C = -f_2^{-1}$$

$$R = \frac{1}{f_2} \sqrt{\frac{r_2 f_1}{f_1 r_2 + f_2}}$$

mit $0 < a \leq 1$, wobei für $a \neq 1$ nach Gl.(3.129) der Signalvektor $\underline{x}(k)$ "genügend" erregt sein muß.

Mit der Ableitung des Fehlermodells für das dezentrale adaptive Regelsystem (s. Bild 2.7) und dem Nachweis der Sektoreigenschaften für jede Komponente des Operators $\underline{H}_1 = \text{diag} \{ H_{1i} \}$ im Vorwärtszweig des Fehlermodells sind die Voraussetzungen für eine Stabilitätsanalyse des Fehlersystems mit Hilfe des Sektor-Stabilitätstheorems geschaffen worden. Im folgenden Kapitel wird der Entwurf dezentraler adaptiver Regelsysteme nach der Sektor-Stabilitätstheorie vorgestellt.

4. Der Entwurf dezentraler adaptiver Regelsysteme nach der Sektor - Stabilitätstheorie

4.1 Das Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung

Das folgende Theorem macht eine Aussage über die Stabilität des dezentralen adaptiven Regelsystems:

Theorem 4.1(das Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung):

Betrachtet wird das Fehlermodell für die dezentrale adaptive Regelung nach Bild 3.4

$$\underline{e}''_m(k) = -\underline{H}''_2 \underline{v}''(k) + \underline{H}''_3 \underline{y}''_m(k) + \underline{H}''_4 \underline{z}''(k) \quad (4.1a)$$

$$\underline{e}''^*_m(k) = \underline{H}''_3 \underline{y}''_m(k) + \underline{H}''_4 \underline{z}''(k) \quad (4.1b)$$

$$\underline{v}''(k) = \underline{H}''_1 \underline{e}''_m(k) \quad , \quad \underline{H}''_1 = \text{diag} \{ \underline{H}''_{1i} \} \quad , \quad i = 1, \dots, q \quad (4.2)$$

mit

$$\underline{e}''_m(k) = a^{-k/2} \underline{R}(k)^{1/2} \underline{e}_m(k) \quad (4.3)$$

$$\underline{e}''^*_m(k) = a^{-k/2} \underline{R}(k)^{1/2} \underline{e}^*_m(k) \quad (4.4)$$

$$\underline{e}''_1(k) = a^{-k/2} \underline{R}(k)^{1/2} \underline{e}_1(k) \quad (4.5)$$

$$\underline{v}''(k) = a^{-k/2} \underline{R}(k)^{1/2} \underline{v}(k) \quad (4.6)$$

und

$$0 < a \leq 1 \quad (4.7)$$

$$\underline{R}(k) = \text{diag} \left\{ r_i(k) \right\} \quad , \quad i = 1, \dots, q \quad (4.8)$$

$$r_i(k)^{-1} = r_{1i} r_{1i}(k-1)^{-1} + r_{2i} g_i(k) + r_3 \quad (4.9)$$

$$0 < r_{1i} < 1 \quad , \quad r_{2i} > 0 \quad , \quad r_3 > 0 \quad , \quad r_i(0) < r_3^{-1}(1-r_{1i}) \quad . \quad (4.10)$$

Der Ausdruck $g_i(k)$ in Gl.(4.9) für den Signalwichtungsfaktor $r_i(k)$ hängt von dem gewählten Adaptionsgesetz ab und erfüllt die Bedingung

$$0 \leq g_i(k) < k_i \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{x}_i(k-d_i) \quad . \quad (4.11)$$

Der aus den Signalvektoren $\underline{x}_i(k-d_i)$ in Gl.(4.11) zusammengesetzte Gesamtsignalvektor $\underline{x}_s(k)$

$$\underline{x}_s(k) = \left[\underline{x}_1(k-d_1)^T, \underline{x}_2(k-d_2)^T, \dots, \underline{x}_q(k-d_q)^T \right]^T \quad (4.12)$$

hängt über die stabilen Übertragungsmatrizen $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ von den Signalen $\underline{v}(k)$, $\underline{y}_m(k)$ und $\underline{z}(k)$ ab

$$\underline{X}_s(z) = \underline{H}_{11}(z) \underline{V}(z) + \underline{H}_{12}(z) \underline{Y}_m(z) + \underline{H}_{13}(z) \underline{Z}(z) . \quad (4.13)$$

(B1) Existiert dann ein linearer Regler mit den Reglermatrizen $\underline{P}(z)$, $\underline{S}(z)$, $\underline{P}_k(z)$ und $\underline{S}_k(z)$

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^g} \left[\underline{P}(z) + \underline{P}_k(z) \right]^{-1} \left[\underline{B}_m(z) \underline{W}(z) - \underline{S}(z) \underline{Y}(z) - \underline{S}_k(z) \underline{Y}_k(z) \right] , \quad (4.14)$$

so daß die Pole der charakteristischen Polynommatrix $\underline{C}(z)$

$$\begin{aligned} \underline{C}(z) = & \underline{A}_k(z) \underline{P}(z) \underline{A}_I(z) + \underline{A}_k(z) \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z) \\ & + \underline{A}_m(z) \underline{B}_k(z) \underline{A}(z) (1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

innerhalb des Kreises mit dem Radius $\sqrt{r_1} a$ um den Punkt $z = 0$ der z -Ebene liegen,

(B2) besitzt weiterhin der Operator H''_{1i} die Sektoreigenschaft

$$a) \quad H''_{1i} \text{ liegt schwach außerhalb des Kreises } K_a(C_i, R_i), \quad 0 < R_i < C_i \quad (4.16)$$

oder

$$b) \quad H''_{1i} + K_i \text{ ist schwach positiv, } K_i > 0 \quad (4.17)$$

(B3) und besitzt die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ die Sektoreigenschaft

$$\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z) \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}', \underline{R}')$$

d.h.

$$\max_{0 < \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ \left(H_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T}) - \underline{C}' \right) \underline{R}^{-1} \right\} < 1 \quad (4.18)$$

wobei $\sigma_{\max} \{ \underline{A} \}$ den maximalen singulären Wert der Matrix $\underline{A}$ bezeichnet, mit

$$\underline{C}' = \text{diag} \{ C'_i \} , \quad \underline{R}' = \text{diag} \{ R'_i \} , \quad \underline{C}' \geq \underline{R}' > \underline{0} \quad (4.19)$$

$$\text{a) } C'_i = \frac{-C_i}{C_i^2 - R_i^2} , \quad R'_i = \frac{R_i}{C_i^2 - R_i^2} , \quad (4.20)$$

$$\text{b) } R'_i = C'_i = 0.5 K_i^{-1} , \quad (4.21)$$

dann gilt folgende Aussage:

- das dezentrale adaptive Regelsystem ist global asymptotisch L_∞ - stabil für

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}_m^*(k) = \underline{0} , \quad 0 < a < 1 \quad (4.22)$$

- das dezentrale adaptive Regelsystem ist asymptotisch L_∞ - stabil im Kleinen für

$$\max_{0 < k < N} \left\{ \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) \right\} < \left(\frac{1-r_1}{c_{a,\max}} \frac{1}{r_2 c_8} - c_0 \right) \frac{1-a}{1-r_1} \frac{r_3}{c_1} , \quad 0 < a < 1 \quad (4.23a)$$

$$\sum_{k=0}^N \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) < \left(\frac{1-r_1}{c_{a,\max}} \frac{1}{r_2 c_8} - c_0 \right) \frac{1}{1-r_1} \frac{r_3}{c_2} , \quad a = 1, \quad (4.23b)$$

wobei die Konstanten c_0, c_1, c_2, c_8 und $c_{a,\max}$ im Stabilitätsbeweis definiert werden. Daraus folgt, daß alle im adaptiven Regelkreis auftretenden Signale beschränkt sind

$$\underline{y}(k)^T \underline{y}(k) , \quad \underline{e}_m(k)^T \underline{e}_m(k) , \quad \underline{y}(k)^T \underline{y}(k) , \quad \underline{u}_l(k)^T \underline{u}_l(k) < \text{const} , \quad (4.24)$$

wenn die den Regelkreis anregenden Signale $\underline{y}_m(k)$ und $\underline{z}(k)$ beschränkt sind .

Beweis: Der Beweis des Stabilitätstheorems für die adaptive dezentrale Regelung gliedert sich in 2 Abschnitte. Zuerst wird anhand der Sektor-Stabilitätstheoreme A.2 und

A.3 aus Anhang A die L_2 -Stabilität des exponentiell gewichteten, transformierten Fehlermodells nach Bild 3.4 gezeigt. In Abhängigkeit von der Erregung des adaptiven Regelsystems (s. Gl.(4.23b)) kann der Gewichtungsfaktor a auch zu Eins gesetzt werden. Aus der L_2 -Stabilität des exponentiell gewichteten Systems kann dann auf die L_∞ -Stabilität des transformierten Fehlermodells geschlossen werden. Im zweiten Abschnitt wird dann mit Hilfe des Bellmann-Gronwall-Lemmas (Anhang B) nachgewiesen, daß entweder unter der Bedingung nach Gl.(4.22) oder Gl.(4.23a,b) das ursprüngliche Fehlermodell L_∞ -Stabilität aufweist.

Die Gleichungen (4.1) bis (4.13) beschreiben genau das in den Kapiteln 2 und 3 abgeleitete exponentiell gewichtete, transformierte Fehlermodell des dezentralen adaptiven Regelkreises. Dann kann mit Hilfe der Sektor-Stabilitätstheoreme A.2 und A.3 nach Anhang A eine Aussage über die L_2 -Stabilität des Fehlermodells gemacht werden. Die Bedingung B1 a) beschreibt genau die Sektoreigenschaft des Operators H_{11} im Vorwärtzweig des nichtlinearen Standardregelkreises nach Theorem A.2, die Bedingung B1 b) beschreibt die entsprechende Sektoreigenschaft nach Theorem A.3. Dann folgt nach Theorem A.2 und A.3

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}''(k)^T \underline{v}''(k) \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^{**T}(k) \underline{e}_m^{**}(k) , \quad (4.25)$$

d.h. das Fehlermodell ist L_2 -stabil, wenn die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ die Voraussetzung

$$\underline{H}_2 \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}', \underline{R}') \quad (4.26)$$

mit $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ nach Gl.(4.20) und (4.21) erfüllt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Aussage (4.26) genau dann erfüllt ist, wenn $\underline{H}_2(z)$ die Sektoreigenschaft nach Bedingung B2 besitzt.

Nach Gl.(A.58b), Anhang A, kann die Bedingung (4.26) auch durch die Gleichung

$$\sum_{k=0}^N \left(\underline{e}_1''(k) - \underline{C}' \underline{v}''(k) \right)^T \left(\underline{e}_1''(k) - \underline{C}' \underline{v}''(k) \right) - \underline{v}''(k) \underline{R}'^T \underline{R}' \underline{v}''(k) < \eta(k) \quad (4.27)$$

$$\eta(k) = \sum_{i=1}^q \eta_i(k) = -\eta \left(\sum_{k=0}^N \underline{e}_1''(k)^T \underline{e}_1''(k) + \sum_{k=0}^N \underline{v}''(k)^T \underline{v}''(k) \right) \quad (4.28)$$

beschrieben werden. Definiert man den Ausdruck $\underline{q}''(k)$ als

$$\underline{q}''(k)^T \underline{q}''(k) = \left(\underline{e}_1''(k) - \underline{C}' \underline{v}''(k) \right)^T \left(\underline{e}_1''(k) - \underline{C}' \underline{v}''(k) \right) - \underline{v}''(k)^T \underline{R}'^T \underline{R}' \underline{v}''(k), \quad (4.29)$$

so kann die Sektoreigenschaft nach Gl.(4.26) für $\underline{H}''_2$ auch als

$$\sum_{k=0}^N \underline{q}''(k)^T \underline{q}''(k) < \eta(k) \quad (4.30)$$

oder mit Gl.(4.4) und Gl.(4.6) als

$$\sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^N a^{-k} r_i(k) q_i(k)^2 < \eta(k) \quad (4.31)$$

mit

$$q_i(k)^2 = \left(e_{1i}(k) - C_i v_i(k) \right)^2 - R_i^2 v_i^2(k) \quad (4.32)$$

angegeben werden. Nach Lemma B1 aus Anhang B kann die Summe über das Produkt zweier Folgen durch folgende Formel abgeschätzt werden

$$\sum_{k=0}^N a(k) b(k) = a(N+1) \sum_{l=0}^N b(l) + \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) \left(a(k) - a(k+1) \right). \quad (4.33)$$

Wird in Gl.(4.33) folgende Substitution durchgeführt

$$a(k) = r_i(k) r_1^k \quad (4.34a)$$

$$b(k) = q_i^2(k) (r_1 a)^{-k}, \quad (4.34b)$$

dann ergibt sich für die innere Summe in Gl.(4.31)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N r_i(k) r_1^k (r_1 a)^{-k} q_i(k)^2 \\ &= r_i(N+1) r_1^{N+1} \sum_{k=0}^N (r_1 a)^{-k} q_i(k)^2 + \sum_{k=0}^N \sum_{h=0}^k (r_1 a)^{-h} q_i(h)^2 r_1^k \left(r_i(k) - r_1 r_i(k+1) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Da nach Gl.(4.9) gilt

$$r_i(k) - r_1 r_i(k+1) = r_i(k) r_i(k+1) \left[r_{2i} g_i(k+1) + r_3 \right] > 0, \quad (4.36)$$

ist Gl.(4.31) immer erfüllt, wenn die Bedingung

$$\sum_{k=0}^N (r_1 a)^{-k} q_i(k)^2 < \eta_i(k), \quad i = 1, \dots, q \quad (4.37)$$

für alle N erfüllt ist. Die Sektoreigenschaft nach Gl.(4.31) kann dann auch in der Form

$$\sum_{k=0}^N (r_1 a)^{-k} \left[\left(\underline{e}_1(k) - \underline{C}' \underline{v}(k) \right)^T \left(\underline{e}_1(k) - \underline{C}' \underline{v}(k) \right) \right] - \underline{v}(k)^T \underline{R}^{-1} \underline{R}' \underline{v}(k) < \eta(k) \quad (4.38)$$

angegeben werden. Gl.(4.38) sagt aus, daß der lineare Operator $\underline{H}_2^*$, der durch die Beziehung

$$\underline{e}_1^*(k) = \sqrt{(r_1 a)^{-k}} \underline{e}_1^*(k) = \underline{H}_2^* \sqrt{(r_1 a)^{-k}} \underline{v}(k) \quad (4.39)$$

definiert ist, die Sektoreigenschaft

$$\underline{H}_2^* \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}', \underline{R}')$$

besitzt. Da in diesem Fall der Operator $\underline{H}_2$ eine lineare Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ darstellt, ist nach Lemma A.3, Anhang A, Gl.(4.24) dann erfüllt, wenn $\underline{H}_2(z)$ die Sektoreigenschaft

$$\underline{H}_2(\sqrt{a} r_1 z) \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}', \underline{R}')$$

oder nach Satz A.3, Anhang A (Gl.(A.87a)),

$$\max_{0 < \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ \left(\underline{H}_2(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) - \underline{C}' \right) \underline{R}'^{-1} \right\} < 1 \quad (4.18)$$

besitzt. Dies ist laut Voraussetzung B2 der Fall, so daß sich durch Anwendung von Theorem A.2 und A.3 sofort die L_2 -Stabilität des exponentiell gewichteten, transformierten Fehlermodells ergibt

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}''(k)^T \underline{v}''(k) \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) . \quad (4.25)$$

Betrachtet wird nun im weiteren zunächst der Fall $a \neq 1$. Nach Satz A.5, Anhang A, besteht durch die Einführung exponentiell gewichteter Signale ein Zusammenhang zwischen der L_2 -Stabilität des gewichteten Fehlersystems und der L_∞ -Stabilität des Fehlersystems ohne exponentielle Gewichtung. Aus Gl.(4.25) ergibt sich durch Anwendung von Satz A.5 sofort

$$\underline{v}'^T(N) \underline{v}'(N) \leq c_0 + c_2 \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) \right\} \quad (4.40a)$$

mit

$$c_2 = \frac{c_1}{1 - a} \quad (4.40b)$$

Für den Fall $a = 1$ lautet Gl.(4.25)

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}'(k)^T \underline{v}'(k) \leq c_0 + c_2 \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) \quad (4.41a)$$

Aus Gl.(4.41a) folgt dann sofort

$$\underline{v}'(k)^T \underline{v}'(k) \leq c_0 + c_2 \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) \quad (4.41b)$$

Nach Gl.(3.53c) und Gl.(4.10) ist der Faktor $r_1(k)$ für alle Zeitpunkte k beschränkt

$$r_1(k) \leq r_3^{-1} (1 - r_1) \quad (3.53c)$$

Dann kann anstelle von Gl.(4.40a) auch die Abschätzung

$$\underline{v}'(N)^T \underline{v}'(N) < c_0 + c_2 \frac{1-r_1}{r_3} \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) \right\} \quad (4.42a)$$

angegeben werden. Gl.(4.41b) lautet entsprechend

$$\underline{v}'(k)^T \underline{v}'(k) \leq c_0 + c_2 \frac{1 - r_1}{r_3} \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^{*T}(k) \underline{e}_m^{*}(k) \quad (4.42b)$$

Laut Voraussetzung B1 sind die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_3(z)$ und $\underline{H}_4(z)$ stabil. Sind dann die Signale $\underline{y}_m(k)$ und $\underline{z}(k)$ beschränkt, so folgt

$$\max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) \right\} \leq c_3 . \quad (4.43a)$$

Gilt außerdem $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}_m^*(k) = \underline{0}$, so folgt

$$\sum_{k=0}^N \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) \leq c_3 . \quad (4.43b)$$

Damit ergibt sich sowohl für eine Erregung des adaptiven Regelsystems nach Gl.(4.23a) als auch für eine Erregung nach Gl.(4.23b)

$$\underline{v}'(N)^T \underline{v}'(N) < c_0 + c_2 \frac{1-r_1}{r_3} c_3 = c_4 . \quad (4.44)$$

Aus der Definitionsgleichung für den transformierten Parameterfehlervektor Gl.(4.4) folgt dann auch

$$\underline{v}(N)^T \underline{R}(N) \underline{v}(N) = \sum_{i=1}^q v_i(N)^2 r_i(N) < c_4 . \quad (4.45)$$

Gl.(4.45) sagt aus, daß die L_∞ -Norm des transformierten Parameterfehlers $\underline{v}(k)$ durch c_4 beschränkt ist. Der Faktor c_4 hängt über c_0 von den Anfangsbedingungen und über c_3 von dem anregenden Signal $\underline{e}_m^*(k)$ ab. Im folgenden wird gezeigt, daß unter der Bedingung nach Gl.(4.22) c_4 beliebig klein werden kann. Dazu wird Gl.(4.25) in der Form

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}(k)^T \underline{R}(k) \underline{v}(k) a^{N-k} \leq c_0 a^N + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^*(k)^T \underline{R}(k) \underline{e}_m^*(k) a^{N-k} \quad (4.46)$$

betrachtet. $\underline{R}(k)$ ist durch Gl.(3.53c) und Gl.(4.10) beschränkt. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}(k)^T \underline{R}(k) \underline{v}(k) a^{N-k} \leq c_0 a^N + c_1 \frac{1-r_1}{r_3} \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) a^{N-k} \quad (4.47)$$

oder

$$\underline{v}(N)^T \underline{R}(N) \underline{v}(N) \leq c_0 a^N + c_1 \frac{1-r_1}{r_3} \sum_{k=0}^N \underline{e}_m^*(k)^T \underline{e}_m^*(k) a^{N-k} . \quad (4.48)$$

Dann existiert ein Zeitpunkt $N > N'$, so daß für $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}_m^*(k) = \underline{0}$ gilt

$$\underline{v}^T(N) \underline{R}(N) \underline{v}(N) \leq c_4, \quad (4.49)$$

wobei c_4 beliebig klein werden kann. Damit ist der erste Teil des Beweises beendet.

Nach Gl.(4.45) und Gl.(4.49) ist der transformierte Parameterfehlervektor $\underline{v}'(k)$ beschränkt. Da der Faktor $r_i(k)$ in den Gln.(4.3) bis (4.6) jedoch beliebig klein werden kann, ist zunächst keine Aussage für die L_∞ -Norm der ursprünglichen Signale möglich. Im zweiten Abschnitt des Beweises wird gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen (siehe Gl.(4.22) und Gl.(4.23a,b)) auch die Beschränktheit des Signals $\underline{v}(k)$ nachgewiesen werden kann. Im weiteren wird zur Abschätzung von $\underline{v}(k)$ die nichtrekursive Beschreibungsform des Faktors $r_i(k)$ benötigt. Aus Gl.(4.9) folgt mit $r_1 \neq 0$

$$r_i(k)^{-1} r_1^{-k} - r_i(k-1) r_1^{-(k-1)} = r_{2i} g_i(k) r_1^{-k} + r_3 r_1^{-k} \quad (4.50)$$

und daraus durch Summation über beide Seiten von Gl.(4.50)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N [r_{2i} g_i(k) + r_3] r_1^{-k} &= \sum_{k=0}^N r_i(k)^{-1} r_1^{-k} - r_i(k-1) r_1^{-(k-1)} \\ &= r_i(N)^{-1} r_1^{-N} - r_i(-1)^{-1} r_1 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die nichtrekursive Beschreibung des Faktors $r_i(k)$ lautet dann

$$r_i(N) r_1^N = \left[\sum_{k=0}^N [r_{2i} g_i(k) + r_3] r_1^{-k} + r_i(-1)^{-1} r_1 \right]^{-1}. \quad (4.52)$$

Gl.(4.52) eingesetzt in Gl.(4.49) ergibt eine Abschätzung für das Signal $\underline{v}(k)$

$$\sum_{i=1}^q v_i(N)^2 < c_4 \left[\sum_{k=0}^N [r_{2i} g_i(k) + r_3] r_1^{N-k} + r_i(-1)^{-1} r_1^{N+1} \right]. \quad (4.53)$$

Für die drei in Kapitel 3 untersuchten Adaptionsalgorithmen WFG, WSTA und WRLS lautet der Ausdruck $g_i(k)$ nach Gl.(4.11)

$$g_i(k) = \begin{cases} \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{E}_i \underline{x}_i(k-d_i) & \text{für WFG} \\ f_i(k-d_i-1) \underline{x}_i(k-d)^T \underline{E}_i \underline{x}_i(k-d_i) & \text{für WSTA} \\ \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{E}_i(k-d_i-1) \underline{x}_i(k-d_i) & \text{für WRLS} \end{cases} \quad (4.54)$$

Da sowohl der Faktor $f_i(k)$ nach Gl.(3.30) als auch die Matrix $E_i(k)$ nach Gl.(3.99) beschränkt sind, erfüllen alle drei Algorithmen die Bedingung nach Gl.(4.11)

$$g_i(k) \leq c_{ai} \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{x}_i(k-d_i), \quad (4.55)$$

$$c_{ai} = \begin{cases} \lambda_{\max} \{ E_i \} & \text{für WFG} \\ \lambda_{\max} \{ E_i \} (1 - f_{1i}) f_{3i}^{-1} & \text{für WSTA} \\ (1 - f_{1i}) f_{3i}^{-1} & \text{für WRLS} \end{cases}$$

Gl.(4.55) kann zur weiteren Abschätzung des Parameterfehlervektors $\underline{v}(k)$ in Gl.(4.53) verwendet werden. Einsetzen von Gl.(4.55) in Gl.(4.53) führt auf

$$\sum_{i=1}^q v_i(N)^2 < c_4 \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^N \left(r_{2i} c_{ai} \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{x}_i(k-d_i) + r_3 \right) r_1^{N-k+r_i(-1)^{-1}} r_1^{N+1}. \quad (4.56)$$

Mit der Abkürzung

$$c_5 = c_4 \frac{r_3}{1-r_1} + r_1(-1)^{-1} r_1 > c_4 \sum_{k=0}^N r_3 r_1^{N-k} + r_1^{-1}(-1) r_1^{N+1} \quad (4.57)$$

ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^q v_i^2(N) < \sum_{i=1}^q \left(c_5 + c_4 r_{2i} c_{ai} \sum_{k=0}^N \underline{x}_i(k-d_i)^T \underline{x}_i(k-d_i) r_1^{N-k} \right). \quad (4.58)$$

Nach Gl.(4.12) können die einzelnen Signalvektoren $\underline{x}_i(k-d_i)$ zu einem Gesamtsignalvektor $\underline{x}_s(k)$ zusammengefaßt werden. Dazu kann Gl (4.58) auch in der Form

$$\underline{v}^T(N) \underline{v}(N) < q c_5 + c_6 r_1^N \sum_{k=0}^N \underline{x}_s(k)^T \underline{x}_s(k) r_1^{-k} \quad (4.59a)$$

$$c_6 = c_4 c_{a,\max}, \quad c_{a,\max} = \max_i \left\{ r_{2i}, c_{ai} \right\} \quad (4.59b)$$

angegeben werden. Für die weitere Abschätzung des Signals $\underline{v}(k)$ ist zu beachten, daß nach Voraussetzung Gl.(4.13) der Gesamtsignalvektor $\underline{x}_s(k)$ seinerseits ebenfalls von $\underline{v}(k)$ abhängt. Betrachtet werden wieder exponentiell gewichtete Signale der Form

$$\underline{x}_s^*(k) = r_1^{-k/2} \underline{x}_s(k) \quad (4.60a)$$

$$\underline{v}^*(k) = r_1^{-k/2} \underline{v}(k) \quad (4.60b)$$

$$\underline{y}_m^*(k) = r_1^{-k/2} \underline{y}_m(k) \quad (4.60c)$$

$$\underline{z}^*(k) = r_1^{-k/2} \underline{z}(k) \quad (4.60d)$$

Aus Gl.(4.13) folgt dann mit Lemma A.3, Anhang A, für den exponentiell gewichteten Gesamtsignalvektor

$$\underline{x}_s^*(z) = \underline{H}_{11}(\sqrt{r_1} z) \underline{v}^*(z) + \underline{H}_{12}(\sqrt{r_1} z) \underline{y}_m^*(z) + \underline{H}_{13}(\sqrt{r_1} z) \underline{z}^*(z) \quad (4.61)$$

Da laut Voraussetzung alle Pole von $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ innerhalb des Kreises mit dem Radius $\sqrt{r_1}$ um den Punkt $z = 0$ der z - Ebene liegen, sind die Operatoren $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ nach Lemma A.4, Anhang A, exponentiell stabil. Dann gilt nach Satz A.5, Anhang A, für die L_2 - Norm des exponentiell gewichteten Gesamtsignalvektors in Gl.(4.59) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \underline{x}_s(k)^T \underline{x}_s(k) &\leq c_7 \sum_{k=0}^N \underline{v}^*(k)^T \underline{v}^*(k) + c_8 \sum_{k=0}^N \underline{y}_m^*(k)^T \underline{y}_m^*(k) \\ &+ c_9 \sum_{k=0}^N \underline{z}^*(k)^T \underline{z}^*(k) \end{aligned} \quad (4.62)$$

oder mit Gl.(4.60a-d)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \underline{x}_s(k)^T \underline{x}_s(k) r_1^{N-k} &\leq \frac{c_8}{1-r_1} \sup_{0 < k \leq N} \left\{ \underline{y}_m(k)^T \underline{y}_m(k) \right\} \\ &+ \frac{c_9}{1-r_1} \sup_{0 < k \leq N} \left\{ \underline{z}(k)^T \underline{z}(k) \right\} + c_7 \sum_{k=0}^N \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) r_1^{N-k} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Wird Gl.(4.63) zur Abschätzung des Parameterfehlervektors $\underline{v}(k)$ in Gl.(4.59) eingesetzt, so ergibt sich schließlich

$$\underline{v}(N)^T \underline{v}(N) < c_{10} + c_{11} \sum_{k=0}^N \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) r_1^{N-k} \quad (4.64)$$

mit

$$c_{10} = c_5 + c_6 \left[\frac{c_7}{1-r_1} \sup_{0 < k < N} \left\{ \underline{y}_m(k)^T \underline{y}_m(k) \right\} + \frac{c_9}{1-r_1} \sup_{0 < k < N} \left\{ \underline{z}(k)^T \underline{z}(k) \right\} \right] \quad (4.65a)$$

$$c_{11} = c_6 c_8 . \quad (4.65b)$$

Das Bellmann-Gronwall-Lemma (Anhang B) läßt eine Abschätzung von Gl.(4.64) zu. Dazu muß Gl.(4.64) in eine geeignete Darstellung umgeformt werden. Nach Multiplikation mit r_1^{-N} ergibt sich

$$\underline{v}(N)^T \underline{v}(N) r_1^{-N} < c_{10} r_1^{-N} + c_{11} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) r_1^{-k} \quad (4.66a)$$

$$< \frac{c_{10}}{1-c_{11}} r_1^{-N} + \frac{c_{11}}{1-c_{11}} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) r_1^{-k} . \quad (4.66b)$$

Gl.(4.66b) entspricht der Gleichung (B.4) im Anhang B

$$u(N) \leq f(N) + \sum_{k=0}^N h(k) u(k) \quad (4.67)$$

mit

$$u(N) = \underline{v}(N)^T \underline{v}(N) r_1^{-N} \quad (4.68a)$$

$$f(N) = \frac{c_{10}}{1-c_{11}} r_1^{-N} \quad (4.68b)$$

$$h(k) = \frac{c_{11}}{1-c_{11}} . \quad (4.68c)$$

Die Anwendung des Bellmann - Gronwall - Lemmas auf Gl.(4.66b) ergibt dann

$$\underline{v}(N)^T \underline{v}(N) r_1^{-N} \leq \frac{c_{10}}{1-c_{11}} + \frac{c_{10} c_{11}}{(1-c_{11})^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(1 + \frac{c_{11}}{1-c_{11}} \right) r_1 \right)^{N-k} . \quad (4.69)$$

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(1 + \frac{c_{11}}{1-c_{11}} \right) r_1 \right)^{N-k} \quad (4.70)$$

konvergiert für

$$\frac{r_1}{1-c_{11}} < 1 \quad \text{oder} \quad c_{11} < 1-r_1. \quad (4.72)$$

Ist die Voraussetzung (4.22) erfüllt, dann kann der Faktor c_4 nach Gl.(4.49) und nach Gl.(4.57 a,b) bzw. Gl.(4.65 a,b) damit auch c_{11} beliebig klein angesetzt werden. Es gilt

$$\underline{v}(N)^T \underline{v}(N) < \text{const} \quad \text{für alle } N. \quad (4.73)$$

Laut Voraussetzung sind die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$, $\underline{H}_3(z)$, $\underline{H}_4(z)$, $\underline{H}_{10}(z)$, $\underline{H}_{11}(z)$ und $\underline{H}_{12}(z)$ stabil. Dann ist das adaptive Regelsystem global asymptotisch L_∞ -stabil, d.h. alle im adaptiven Regelkreis auftretenden Signale sind beschränkt, wenn die den Regelkreis anregenden Signale $\underline{v}_m(k)$ und $\underline{z}(k)$ beschränkt sind. Ist die Voraussetzung (4.22) nicht erfüllt, so folgt mit Gl.(4.43) für c_{11} aus Gl.(4.65b)

$$c_{11} = \left(c_0 + c_2 \frac{1-r_1}{r_3} c_3 \right) c_{a,\max} c_8 < 1-r_1 \quad (4.74a)$$

oder

$$c_3 < \left(\frac{1-r_1}{c_{a,\max} c_8} - c_0 \right) \frac{1}{1-r_1} \frac{r_3}{c_2}. \quad (4.74b)$$

Die Konvergenz der Reihe nach Gl.(4.70) hängt damit über c_3 (siehe Gl.(4.43a,b)) von dem Signal $\underline{e}_m^*(k)$ und über c_0 auch von den Anfangsbedingungen ab. Dann ist das adaptive Regelsystem L_∞ -stabil im Kleinen, wobei der Konvergenzbereich nach Gl.(4.74b) gerade durch Gl.(4.23a,b) bestimmt ist. Durch eine geeignete Wahl der Adaptionsparameter läßt sich der Konvergenzbereich beliebig ausdehnen, so daß die Konvergenz immer gewährleistet werden kann. Damit ist das Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung bewiesen. ■

In Kapitel 2 wurde bereits darauf hingewiesen, daß für nichtminimalphasige Regelstrecken, also Regelstrecken, bei denen mindestens eine der Übertragungsnullstellen außerhalb des Einheitskreises liegt, ein dezentraler adaptiver Regler in der einfachen Form ohne Korrekturnetzwerk nicht eingesetzt werden kann. Für einen adaptiven Mehrgrößenregler nach dem Modellvergleichsverfahren ist diese Bedingung aus der Literatur bekannt (z.B. Hahn,1983). Sie ergibt sich aus der Tatsache, daß der dem adaptiven Entwurf zugrunde liegende Mehrgrößenregler einen Kompensationsregler darstellt,

in dem die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke gekürzt werden. Da dezentrale Regler für beliebig verkoppelte Mehrgrößenregelstrecken von ihrem Ansatz her keine Kompensationsregler darstellen, ist zunächst zu erwarten, daß dezentrale adaptive Regelsysteme auch für nichtminimalphasige Regelstrecken eingesetzt werden können. Eine minimalphasige Regelstrecke wird in Theorem 4.1 auch in keiner Bedingung explizit vorausgesetzt. Im folgenden soll jedoch gezeigt werden, daß diese Voraussetzung in der Bedingung B3 implizit enthalten ist.

In der Bedingung B3 wird gefordert, daß der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ für alle Werte ω , $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$, die Bedingung

$$\max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ \left(\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T}) - \underline{C}' \right) \underline{R}'^{-1} \right\} < 1 \quad (4.18)$$

erfüllt. Bekanntlich gilt für den Betrag des maximalen Eigenwertes einer Matrix $\underline{A}$ (Steward, 1973, Seite 270)

$$|\lambda_{\max}\{\underline{A}\}| \leq \sigma_{\max}\{\underline{A}\}. \quad (4.75)$$

Wird diese Eigenschaft auf die Gl.(4.18) angewendet, so folgt

$$|\lambda_{\max}\left\{ \left(\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T}) - \underline{C}' \right) \underline{R}'^{-1} \right\}| < 1. \quad (4.76)$$

Im weiteren wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß alle Elemente der diagonalen Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ den gleichen Wert besitzen

$$\underline{C}' = c \underline{I}, \quad \underline{R}' = r \underline{I}. \quad (4.77)$$

Dann sagt Gl.(4.75) aus, daß die Ortskurven der komplexen Eigenwerte der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T})$ alle vollständig innerhalb eines Kreises mit dem Radius r um den Punkt c der komplexen z -Ebene verlaufen, wenn die Bedingung B3 erfüllt ist. Nach Gl.(4.19) gilt außerdem $c \geq r > 0$. Damit verlaufen die Ortskurven der komplexen Eigenwerte alle innerhalb eines Kreises, der vollständig innerhalb der rechten z -Halbebene liegt. Wird mit dem Ausdruck $\Delta \arg \{\lambda_i(\omega)\}$ die Änderung des Phasenwinkels des komplexen Eigenwertes $\lambda_i(\omega)$ über der Frequenz ω bezeichnet, so kann die Tatsache,

daß die Ortskurven aller komplexen Eigenwerte vollständig innerhalb der rechten z -Halbebene verlaufen, durch die Gleichung

$$\Delta \arg \left\{ \det \{ \underline{H}_2(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \} \right\} = \Delta \arg \left\{ \prod_{i=1}^q \lambda_i(\omega) \right\} = 0 \quad (4.78)$$

beschrieben werden. Nach Gl.(2.89a) kann die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ in ein Produkt von Polynommatrizen aufgespalten werden. Dann folgt (Wolovich und Falb, 1969, Corollary 2.3)

$$\det \left\{ \underline{H}_2(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \right\} = \frac{\det \left\{ \underline{B}_e(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \right\}}{\det \left\{ \underline{C}(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \right\}}, \quad (4.79)$$

wobei die Polynommatrix $\underline{B}_e(z)$ die Übertragungsnullstellen der erweiterten Regelstrecke und $\underline{C}(z)$ die Pole des geschlossenen linearen Regelkreises enthält. Mit Hilfe des Satzes über das Argument einer komplexen Funktion ("principle of the argument", Anhang B) läßt sich nun eine Aussage über die Änderung des Phasenwinkels der Funktion $\det \{ \underline{H}_2(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \}$ über der Frequenz machen. Wird eine geschlossene Kurve in der komplexen z -Ebene, hier der Rand des Einheitskreises, gegen den Uhrzeiger durchlaufen, so ändert sich das Argument der Funktion genau um

$$\Delta \arg \left\{ \det \{ \underline{H}_2(\sqrt{r_1 a} e^{j\omega T}) \} \right\} = 2 \pi (N - P), \quad (4.80)$$

wobei N die Anzahl der Nullstellen und P die Anzahl der Pole der Funktion innerhalb des umschlossenen Gebietes darstellt. Im allgemeinen müssen Pole, die auf der Kreisbahn liegen, durch einen unendlich kleinen Halbkreis umlaufen werden. Dieser Fall tritt jedoch hier nicht auf, wenn die Bedingung B1 erfüllt ist. Dann ergibt sich für alle Regelsysteme, die die Bedingung B3 erfüllen, aus dem Vergleich der Gln.(4.77) und (4.79)

$$N = P. \quad (4.81)$$

Da nach Bedingung B1 alle Wurzeln von $\det \{ \underline{C}(z) \}$ innerhalb des umschlossenen Gebietes liegen, müssen auch die Wurzeln von $\det \{ \underline{B}_e(z) \}$, also die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke bzw. der erweiterten Regelstrecke, alle innerhalb des Kreises um den Punkt $z = 0$ mit dem Radius $\sqrt{r_1 a}$ liegen

$$\det \{ \underline{B}_e(z) \} \neq 0 \quad \text{für } |z| > \sqrt{r_1 a}. \quad (4.82)$$

Andernfalls kann die Bedingung B3 nicht erfüllt werden. Damit ergibt sich an die Wurzeln von $\det \{ \underline{B}_e(z) \}$ eine Forderung, die sogar noch über die in Kapitel 2 zunächst formulierte Bedingung (siehe Gl.(2.41a)) hinausgeht.

4.2 Das Entwurfsverfahren

Mit dem im letzten Kapitel vorgestellten Theorem 4.1 steht nun eine Möglichkeit zur Stabilitätsanalyse eines dezentralen adaptiven Regelsystems zur Verfügung. Die Gleichungen (4.1a,b) und (4.2) in Theorem 4.1 beschreiben genau das im Kapitel 2 abgeleitete Fehlermodell des dezentralen adaptiven Regelsystems (siehe Gl.(2.87)) mit exponentiell gewichteten Signalen nach Gl.(4.3) bis Gl.(4.13), wie sie im Kapitel 3 bei der Ableitung der Sektoreigenschaften für verschiedene Adaptionsalgorithmen eingeführt wurden. Wie bereits im Kapitel 2 gezeigt wurde, wird der bei der Berechnung des Signalwichtungsfaktors $r_1(k)$ nach Gl.(4.8) benötigte Gesamtsignalvektor $\underline{x}_s(k)$ durch die Gln.(4.13) bzw. (2.100) beschrieben. Die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$, $\underline{H}_3(z)$, $\underline{H}_4(z)$, $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ hängen bei der Verwendung eines Stellgesetzes nach Gl.(4.14) dann von der Regelstrecke, dem Parallelmodell, dem Korrekturnetzwerk und den Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ nach Gl.(2.34) ab. Die einzelnen Ausdrücke für die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$, $\underline{H}_3(z)$, $\underline{H}_4(z)$, $\underline{H}_{11}(z)$, $\underline{H}_{12}(z)$ und $\underline{H}_{13}(z)$ sind in Kapitel 2 durch die Gleichungen (2.89a,b,c), (2.93a,b,c) und Gl.(2.95a,b,c) gegeben. Die Stabilität aller Übertragungsmatrizen wird durch die charakteristische Polynommatrix $\underline{C}(z)$ nach Gl.(4.15) bestimmt.

Zur Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelsystems müssen dann die drei Bedingungen B1, B2 und B3 nach Theorem 4.1 überprüft werden. In der ersten Bedingung B1 wird gefordert, daß die Pole der charakteristischen Polynommatrix $\underline{C}(z)$ nach Gl.(4.15) alle innerhalb eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{r_1 a}$ um den Punkt $z = 0$ der z -Ebene liegen. Da nach Gl.(4.10) der Faktor $\sqrt{r_1 a}$ die Ungleichung $0 < \sqrt{r_1 a} < 1$ erfüllt, müssen alle Pole von $\underline{C}(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen, wenn der Faktor $\sqrt{r_1 a}$ näherungsweise gleich 1 gesetzt wird. Damit wird durch die Bedingung B1 gefordert, daß für die um das Korrekturnetzwerk erweiterte Regelstrecke nach Gl.(2.39) und Bild

2.3 ein linearer Regler bestehend aus den Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ existiert, so daß der lineare geschlossene Regelkreis exponentiell stabil vom Grad $\sqrt{r_1}a$ ist. Von Hahn (1985) wurde ein Verfahren angegeben, mit dem für beliebige Regelstrecken lineare, dezentrale Regler, die diese Bedingung erfüllen, entworfen werden können. Die Bedingung B1 kann dann immer erfüllt werden, wenn die Ordnung der Reglerpolynome $S_i^r(z)$ und $P_{ij}^r(z)$, $i, j = 1, \dots, q$, genügend groß angesetzt wird.

Die zweite Bedingung B2 in Theorem 4.1 beinhaltet die Sektoreigenschaften der lokalen Adaptionsgesetze, die durch den Operator $\underline{H}_1$ im transformierten Fehlermodell mit exponentiell gewichteten Signalen beschrieben werden. Diese Sektoreigenschaften wurden für verschiedene Adaptionsgesetze im Kapitel 3 untersucht. Die Ergebnisse sind im Satz 3.3 zusammengefaßt. Wird also ein Adaptionsgesetz nach Satz 3.3 (WFG, WSTA oder WRLS) zur Nachstellung der lokalen Reglerparameter verwendet, so ist die Bedingung B2 automatisch erfüllt. Die Sektorgrenzen C_i und R_i bzw. K_i hängen nur von den Einstellparametern der einzelnen Adaptionsgesetze r_2 , f_1 und f_2 ab.

Von entscheidender Bedeutung für die Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelsystems ist die Bedingung B3 in Theorem 4.1. Die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1}a z)$ muß nach Gl.(4.18) eine Sektorbedingung erfüllen, die im Frequenzbereich anhand des Verlaufs des maximalen singulären Wertes über der Frequenz ω , $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$, überprüft wird. Zur Berechnung der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1}a z)$ nach Gl.(2.89a) oder Gl.(2.97) muß ein Modell der Regelstrecke, das Korrektornetzwerk, das Parallelmodell und ein aus den Matrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ bestehender linearer Regler, der den linearen Grundregelkreis stabilisiert, bekannt sein. Da sich der adaptive Regler selbständig an zeitveränderliche oder nur unzureichend bekannte Regelstrecken anpassen kann, hängt die Regelgüte nicht davon ab, wie genau das Modell der Regelstrecke mit dem tatsächlichen Verhalten übereinstimmt. Die Erfahrung hat gezeigt, daß in den meisten Fällen zur Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelkreises ein einfaches Modell, wie es z.B. durch die Auswertung von Sprungantworten mit wenig Aufwand ermittelt werden kann, ausreicht. Da die Stabilität des adaptiven Regelkreises im wesentlichen durch die Kopplungen der Regelstrecke bestimmt wird, sollte bei der Modellbildung darauf geachtet werden, daß das dynamische Verhalten der Kopplungen möglichst genau wiedergegeben wird.

Sind die Totzeiten jeder Einzelübertragungsfunktion der Regelstrecke bekannt, so wird zuerst untersucht, ob die Gl.(2.12) erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, so muß nach Gl.(2.15) ein diagonales Vorfilter $\underline{D}_v(z)$ vor die Regelstrecke geschaltet werden, so daß diese Bedingung für das Produkt aus Regelstrecke und Vorfilter erfüllt ist. Ist dieses Vorfilter nicht aufgrund einfacher Überlegungen zu ermitteln, so kann es, wie in Kapitel 2 bereits angegeben wurde, durch ein Verfahren von Narendra und Singh (1983) berechnet werden.

Außer von dem Modell der Regelstrecke hängt die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1}a \ z)$ auch von dem Korrektornetzwerk $\underline{G}_k(z)$ nach Gl.(2.38b) ab. Ein Korrektornetzwerk muß dann eingesetzt werden, wenn eine der Übertragungsnullstellen der Regelstrecke außerhalb des Kreises mit dem Radius $\sqrt{r_1}a$ um den Punkt $z = 0$ der z -Ebene liegt. In diesem Fall wird das Korrektornetzwerk entworfen, so daß alle Übertragungsnullstellen der erweiterten Regelstrecke nach Gl.(2.39) die Bedingung nach Gl.(4.82) erfüllen. Mit einem von Hahn (1983) angegebenen Verfahren ist es immer möglich, für beliebige Regelstrecken ein dezentrales Korrektornetzwerk zu berechnen, so daß diese Bedingung erfüllt ist. Für stabile Regelstrecken ist die Ermittlung eines geeigneten Korrektornetzwerks sehr einfach. Wie von Hahn (1983) gezeigt wurde, liegen alle Übertragungsnullstellen der erweiterten Regelstrecke innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene, wenn für stabile Regelstrecken ein diagonales Korrektornetzwerk der Form

$$\underline{G}_k(z) = \text{diag} \{ G_{ki}(z) \} = \text{diag} \left\{ K_i \frac{1-z^{-1}}{A_{ki}(z)} z^{-d_{i,\min}} \right\}, \quad i = 1, \dots, q, \quad (4.83)$$

eingesetzt wird und der Betrag von K_i genügend groß gewählt wird. Das Vorzeichen von K_i muß die Bedingung

$$\text{sgn} \{ K_i \} = \text{sgn} \left\{ \frac{\det\{\underline{G}_i(1)\}}{\det\{\underline{G}_{i-1}(1)\}} \right\} \quad (4.84)$$

erfüllen. Die Matrix $\underline{G}_i(1)$ in Gl.(4.84) bezeichnet die nordwestliche Untermatrix der Dimension $i \times i$ der Regelstrecke. $\underline{G}_0(1)$ wird definitionsgemäß zu 1 gesetzt. Das stabile Polynom $A_{ki}(z)$ in Gl.(4.83) enthält die dominierenden Zeitkonstanten des jeweiligen Teilmodells der Regelstrecke.

Erfüllen alle Übertragungsnullstellen des a-priori Modells der Regelstrecke die Bedingung nach Gl.(4.82), so kann unter bestimmten Voraussetzungen der Einsatz eines Korrektornetzwerks trotzdem sinnvoll sein. In Kapitel 2 wurde bereits darauf hingewiesen, daß zur Ableitung des Fehlermodells die Totzeiten der Regelstrecke bekannt sein müssen. Andernfalls muß die Matrix $\underline{D}_m(z)$ im Parallelmodell so angesetzt werden, daß jedes Element eine Abschätzung der maximalen Totzeit $d_{i,\max}$ des jeweiligen Elementes der tatsächlichen Totzeitmatrix $\underline{D}_a(z)$ der Regelstrecke darstellt. Wird jedoch ein Korrektornetzwerk eingesetzt, so ist die Totzeitmatrix der erweiterten Regelstrecke immer bekannt, wenn nach Gl.(2.44) als Totzeit des Korrektornetzwerks eine Abschätzung der minimalen Totzeit für jedes Element der Matrix $\underline{D}_a(z)$ der Regelstrecke eingesetzt wird. Im Gegensatz zur maximalen Totzeit ist eine Abschätzung der minimalen Totzeit immer möglich. Damit ist der adaptive Regelkreis gleichzeitig robust gegenüber Änderungen der Totzeiten der Regelstrecke.

Ein zweiter Grund warum auch dann ein Korrektornetzwerk eingesetzt werden sollte, wenn die Übertragungsnullstellen des a-priori Modells der Regelstrecke innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegen, ergibt sich aus der Bedingung B3 in Theorem 4.1 und Gl.(2.88a). Wie bereits im Kapitel 2 erläutert wurde, ergibt sich im Idealfall einer vollständigen adaptiven Mehrgrößenregelung für die Übertragungsmatrizen $\underline{H}_2(z)$ und $\underline{H}_3(z)$ des Fehlermodells

$$\underline{H}_2(z) = \underline{I} \quad , \quad \underline{H}_3(z) = \underline{0} \quad . \quad (4.85)$$

In diesem Fall liegen die Ortskurven der komplexen Eigenwerte der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$ alle im Punkt $z = 1$ der z-Ebene. Durch eine geeignete Wahl der Adaptionsparameter können dann die Bedingungen B2 und B3 des Theorems 4.1 immer erfüllt werden. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall einer dezentralen Regelung einer vollständig verkoppelten Regelstrecke gilt $\underline{H}_2(z) \neq \underline{I}$. In diesem Fall kann die Bedingung B3 des Theorems 4.1 auch dann noch erfüllt werden, wenn die Ortskurven der komplexen Eigenwerte der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$ alle in der Nähe des Punktes $z = 1$ der z-Ebene liegen. Aus der Gl.(2.88a) geht hervor, daß diese Bedingung nicht nur erfüllt ist, wenn durch einen geeigneten Ansatz für die Reglerstruktur die Gl.(2.34) mit $\|\underline{H}(z)\| \ll 1$ lösbar ist, sondern auch dann, wenn die Norm des Ausdrucks $\underline{G}(z) [\underline{G}(z) + \underline{G}_K(z)]^{-1}$ sehr klein wird. Dies kann durch die Wahl eines passenden

Korrektturnetzwerks immer erreicht werden. Läßt sich also für eine minimalphasige Regelstrecke ohne Korrekturnetzwerk kein linearer, dezentraler Regler bestehend aus den Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$ finden, so daß die Bedingung B3 erfüllt ist, dann kann durch den Einsatz eines Korrekturnetzwerks diese Bedingung immer erfüllt werden.

Die Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelsystems gilt im Prinzip nur für zeitinvariante Regelstrecken, da in die Berechnung der Matrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$ nach Gl.(2.89a) die Koeffizienten der Polynommatrizen $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ der Regelstrecke eingehen. Einen Grenzfall stellen zeitinvariante Regelstrecken dar, bei denen sich die Parameter quasi sprungförmig ändern und dann über einen gewissen Zeitraum konstant bleiben. Zum Beispiel kann das linearisierte Modell einer nichtlinearen Regelstrecke bei Arbeitspunktänderungen durch diesen Ansatz beschrieben werden. Zur Stabilitätsanalyse wird der maximale singuläre Wert der Matrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$ gezeichnet. Die Bedingung B3 muß dann für alle Parametersätze der Regelstrecke erfüllt werden. Durch ähnliche Überlegungen können auch parameterunsichere Regelstrecken behandelt werden. Werden die Modellunsicherheiten im Frequenzbereich durch Grenzkurven der Ortskurve jeder Einzelübertragungsfunktion der Regelstrecke beschrieben, so ergeben sich auch Grenzkurven für den Verlauf des maximalen singulären Wertes der Matrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$. Eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Theorems 4.3 ist dann anhand dieser Grenzkurven möglich.

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt, daß für beliebige Regelstrecken durch den Ansatz einer genügend großen Ordnung für die Reglerpolynome $S_i^r(z)$ und $P_{ij}^r(z)$, den Einsatz eines geeigneten Korrekturnetzwerks und die Wahl passender Adaptionparameter alle Bedingungen von Theorem 4.1 erfüllt werden können. Auf die Ermittlung passender Adaptionparameter aus der grafischen Darstellung des maximalen singulären Wertes der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a z)$ wird im folgenden näher eingegangen.

Die Sektorgrenzen C'_i und R'_i sind nach Gl.(4.20) eine Funktion der Sektorgrenzen C_i und R_i in Bedingung B2. Damit hängen auch die Sektorgrenzen C'_i und R'_i in Bedingung B3 direkt von den Einstellparametern der Adaptionsgesetze WFG, WSTA und

WRLS ab. Werden die Parameter C_i und R_i aus Satz 3.3 in Gl.(4.20) eingesetzt, so ergeben sich die Sektorgrenzen des WFG-Adaptionsgesetzes (Satz 3.2) in Bedingung B3

$$R'_i = C'_i = r_{2i} . \quad (4.86a)$$

Die Sektorgrenzen der Adaptionalgorithmen WSTA und WRLS (Satz 3.3) lauten entsprechend

$$C'_i = f_{2i} + r_{2i} f_{1i} \quad (4.86b)$$

und

$$R'_i = \sqrt{r_{2i} f_{1i} (f_{2i} + r_{2i} f_{1i})} . \quad (4.86c)$$

Mit Hilfe der Gln.(4.86a,b,c) ist es auf einfache Weise möglich, direkt aus den Sektorgrenzen C'_i und R'_i für die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_{1i}} a z)$ geeignete Adaptionparameter f_{1i} , f_{2i} und r_{2i} zu ermitteln. Die Funktionen $C'_i = f(f_{1i}, r_{2i})$ und $R'_i = f(f_{1i}, r_{2i})$ sind für die Algorithmen WSTA und WRLS für verschiedene Werte von f_{1i} im Bild 4.1 dargestellt. Eine erste Abschätzung der Adaptionparameter ist oft auch mit Hilfe der Funktionen

$$K'_{\min} = C'_i - R'_i = f(f_{1i}, r_{2i}) \quad (4.87a)$$

und

$$K'_{\max} = C'_i + R'_i = f(f_{1i}, r_{2i}) , \quad (4.87b)$$

also der Schnittpunkte des Kreises mit der reellen Achse, möglich. Diese Funktionen sind für die Algorithmen WSTA und WRLS für verschiedene Werte von f_{1i} im Bild 4.2 dargestellt. Die Sektorgrenzen C'_i und R'_i müssen nach Bedingung B3 so angesetzt werden, daß der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}$ über der Frequenz ω , $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$, nach Gl.(4.18) für alle ω unterhalb des Wertes 1 bleibt. Im vorherigen Kapitel wurde bereits gezeigt, daß in diesem Fall die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$, $i = 1, \dots, q$, der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_{1i}} a e^{j\omega T})$ über der Frequenz ω , $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$, alle innerhalb eines Kreises mit dem Radius r um den Punkt $z = c$ der z -Ebene verlaufen. Zur Ermittlung geeigneter Sektorgrenzen C'_i und R'_i werden deshalb zunächst die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$, $i = 1, \dots, q$, der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_{1i}} a e^{j\omega T})$ gezeichnet und aus ihrem Verlauf ein Kreismittelpunkt c und ein Radius r bestimmt, so daß die Ortskurven alle vollständig innerhalb

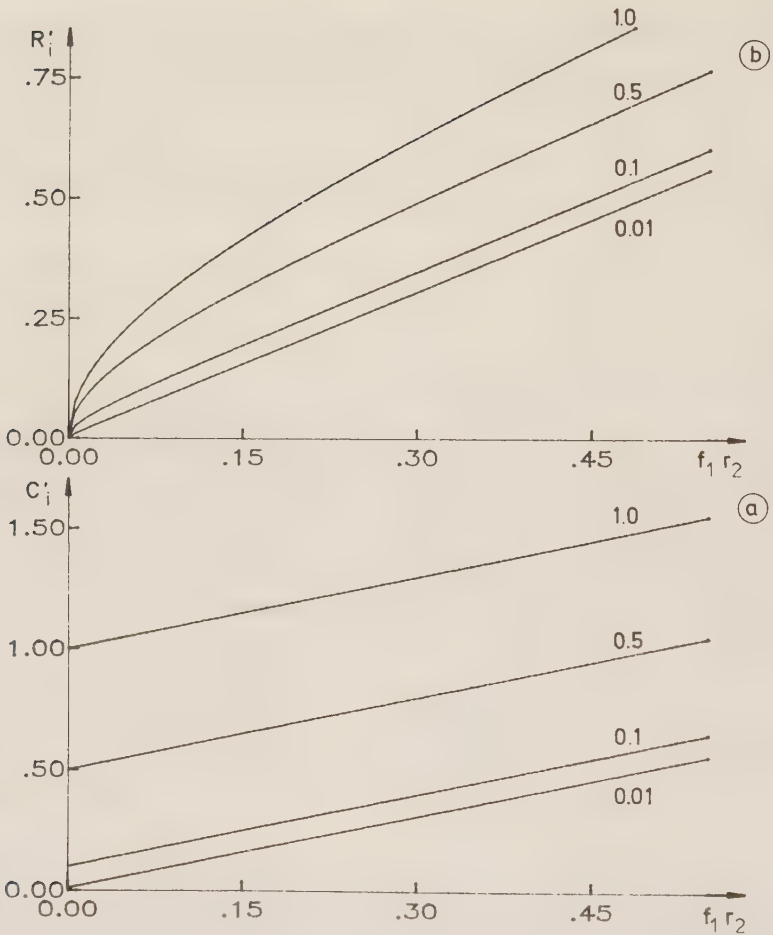


Bild 4.1 Zur Darstellung der Funktionen a) $C'_i = f(f_1 r_2)$ und b) $R'_i = f(f_1 r_2)$

dieses Kreises verlaufen. Die Parameter c und r können dann als Anhaltspunkte für die Sektorgrenzen C'_i und R'_i verwendet werden. Da der maximale singuläre Wert einer Matrix immer größer oder gleich dem betragsmäßig maximalen Eigenwert ist, folgt aus der Tatsache, daß die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ alle vollständig innerhalb des Kreises verlaufen, nicht automatisch, daß der maximale singuläre Wert $\sigma_{\max}(\omega)$ die Bedingung B3 erfüllt. Vielmehr muß diese Bedingung anschließend noch überprüft werden und gegebenenfalls ein größerer Wert für R'_i angesetzt werden.

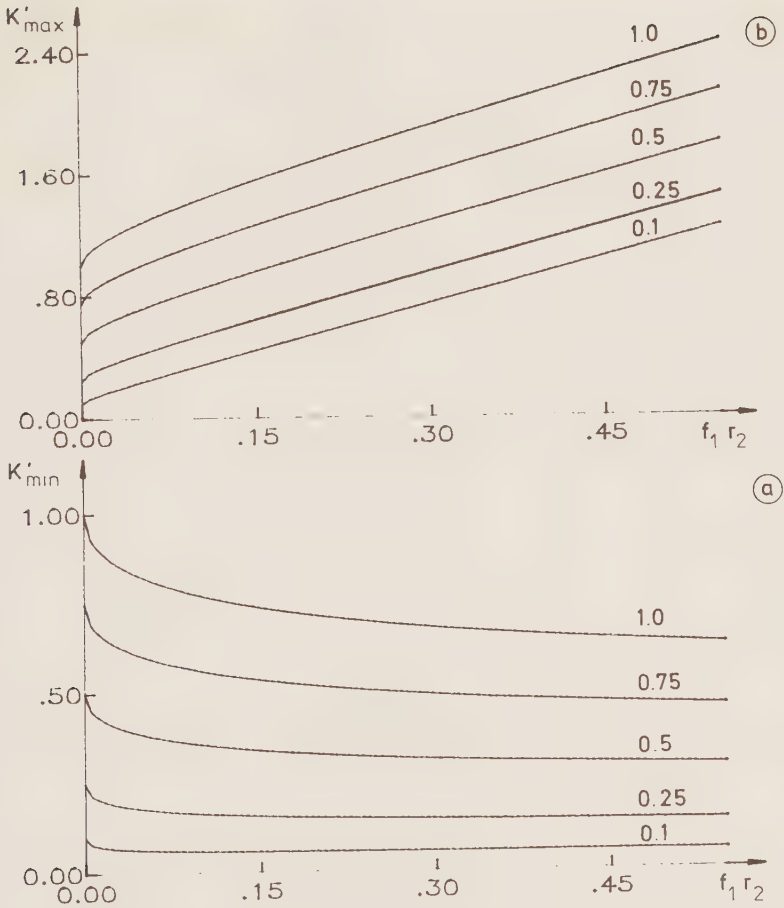


Bild 4.2 Zur Darstellung der Funktionen a) $K'_{\min} = f(f_1 r_2)$ und b) $K'_{\max} = f(f_1 r_2)$

Der Abstand des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$, $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$, von dem kritischen Wert 1 soll im weiteren auch als *Stabilitätsreserve* σ_R

$$\sigma_R = \left[1 - \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max}(\omega) \right] \text{ dB} = - \sigma_{\max}(\omega) \text{ dB} \quad (4.88)$$

des adaptiven Regelsystems bezeichnet werden.

In Theorem 4.1 werden hinreichende Bedingungen für die Stabilität des dezentralen adaptiven Regelsystems angegeben. Dabei ist zu beachten, daß der adaptive Regelkreis auch dann stabil sein kann, wenn eine der Bedingungen B2 oder B3 nicht erfüllt ist. In diesem Sinne stellen die Bedingungen in Theorem 4.1 zwar hinreichende, aber keine notwendigen Stabilitätsbedingungen dar. Die Erprobung des adaptiven dezentralen Regelsystems hat gezeigt, daß in vielen Fällen die Adaptionparameter r_{2i} , f_{1i} und f_{2i} so gewählt werden können, daß der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ (Sektorbedingung Gl.(4.18) in Theorem 4.1) den Wert 1 deutlich übersteigt. Wird z.B. der Parameter r_{2i} sehr klein angesetzt, so ergibt sich eine wesentlich schnellere Konvergenz der Adaptionparameter. In diesem Fall ist die Stabilität des gesamten Regelsystems allerdings nicht mehr gesichert. Sie hängt vielmehr stark von der äußeren Erregung, z.B. dem Verlauf der Führungsgrößen oder der Art der Störungen, ab. Bei der Implementierung des dezentralen adaptiven Regelsystems an einer realen Anlage werden deshalb zunächst die Adaptionparameter mit Hilfe des Theorems 4.1 so eingestellt, daß die Stabilität des gesamten Regelsystems garantiert ist. Während der Inbetriebnahmephase kann dann der Einfluß der Adaption solange erhöht werden, bis sich eine schnelle Konvergenz der Reglerparameter ergibt. Da sich in den meisten Fällen während des Betriebs der Anlage die Streckenparameter nur langsam ändern, wird anschließend dieser Einfluß wieder soweit reduziert, daß die Stabilitätsbedingungen nach Theorem 4.1 erfüllt sind. Auf diese Weise ergibt sich bei einem ständigen Einsatz der Adaption ein robustes adaptives Regelsystem.

Das dynamische Verhalten des adaptiven Regelsystems während der Anfangsphase der Adaption hängt sowohl von den Adaptionparametern der lokalen Adaptionsalgorithmen als auch vom Korrekturnetzwerk ab. Durch Vergrößerung des Faktors K_i in Gl.(4.83) bei der Berechnung des Korrekturnetzwerks kann das dynamische Verhalten des adaptiven Regelsystems während der Anfangsphase der Adaption gedämpft werden. Gleichzeitig wird die Anstiegszeit der Ausgangsgrößen bei sprungförmigen Sollwertänderungen nach Abschluß der Adaption vergrößert. Gegebenenfalls muß deshalb ein anderes Parallelmodell eingesetzt werden.

Das gesamte Entwurfsverfahren für das dezentrale adaptive Regelsystem besteht dann aus 12 Schritten. Ein Ablaufdiagramm ist im Bild 4.3 dargestellt. Die einzelnen Schritte

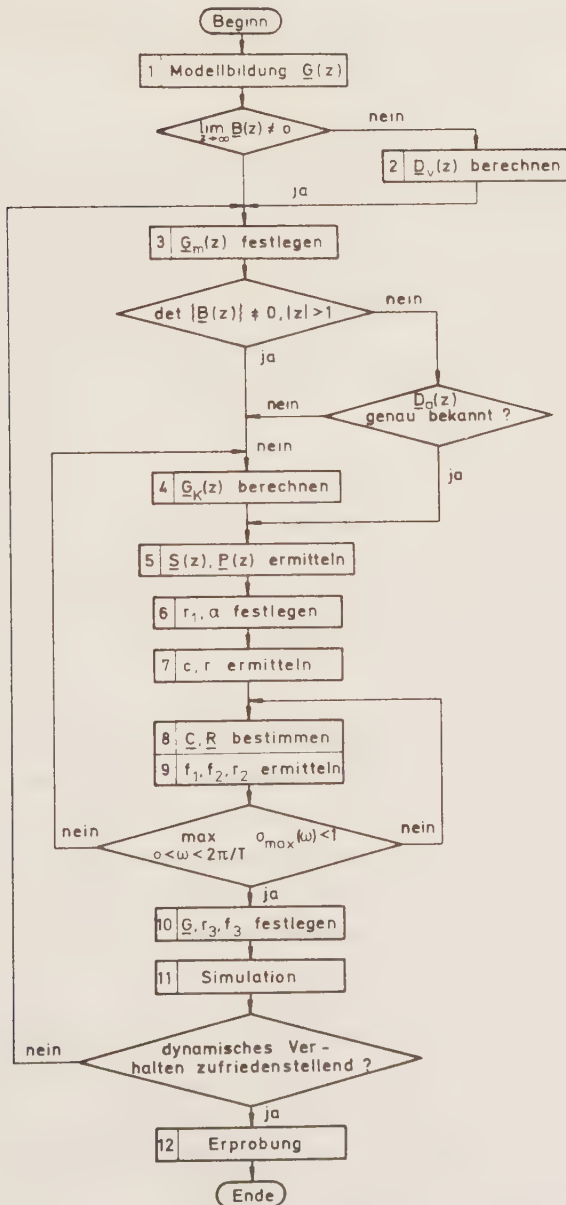


Bild 4.3 Ablaufdiagramm für den Entwurf des dezentralen adaptiven Regelsystems

müssen teilweise hintereinander, teilweise nebeneinander bearbeitet werden. Sie werden im folgenden noch einmal kurz erläutert.

Schritt 1: Modellbildung der Regelstrecke

Zur Stabilitätsanalyse des dezentralen adaptiven Regelsystems muß ein einfaches Modell der Regelstrecke, das auch die Kopplungen der einzelnen Teilsysteme beschreibt, in der Form einer Übertragungsmatrix bekannt sein. Anhand dieses Modells werden die Übertragungsnullstellen der Regelstrecke berechnet und die Totzeitstruktur ermittelt. Liegt mindestens eine der Übertragungsnullstellen außerhalb des Einheitskreises, so muß im Schritt 4 ein Korrekturnetzwerk berechnet werden.

Schritt 2: Berechnung des Vorfilters $\underline{D}_v(z)$

Diese Berechnung ist nur notwendig, wenn die Gl.(2.12) nicht erfüllt ist. Die Berechnung ist außerdem nur sinnvoll, wenn die Matrix $\underline{D}_a(z)$ genau bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muß eine Abschätzung der minimalen Totzeit für jedes Element der Matrix $\underline{D}_a(z)$ durchgeführt und ein entsprechendes Korrekturnetzwerk entworfen werden.

Schritt 3: Wahl des Parallelmodells

Das Parallelmodell bestimmt das Führungsverhalten des geschlossenen linearen Regelkreises ohne Korrekturnetzwerk nach Abschluß der Adaption. Ergibt sich aus Schritt 1 oder 2, daß ein Korrekturnetzwerk eingesetzt werden muß, so wird zweckmäßigerweise das Parallelmodell als Einheitsmatrix angesetzt und das Führungsverhalten des Regelkreises durch das Korrekturnetzwerk bestimmt.

Schritt 4: Berechnung des Korrekturnetzwerks

Ein Korrekturnetzwerk muß eingesetzt werden, wenn mindestens eine der Übertragungsnullstellen außerhalb des Einheitskreises liegt, wenn die Totzeitstruktur der Regelstrecke nicht genau bekannt ist oder wenn ohne Korrekturnetzwerk die Sektorbedingung im Schritt 8 nicht erfüllt werden kann. Für stabile Regelstrecken kann ein diagonales Korrekturnetzwerk der Form

$$\underline{G}_k(z) = \text{diag} \left\{ \underline{G}_{ki}(z) \right\} = \text{diag} \left\{ K_i \frac{1-z^{-1}}{A_{ki}(z)} z^{-d_{i,\min}} \right\}, \quad i = 1, \dots, q \quad (4.83)$$

eingesetzt werden. Der Betrag von K_i muß genügend groß gewählt werden. Er bestimmt das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Das Vorzeichen von K_i wird nach Gl.(4.84) berechnet.

Schritt 5: Ermittlung der linearen Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ t

Der aus den Matrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ bestehende lineare Regler muß nach Bedingung B1 den linearen Grundregelkreis stabilisieren. Außerdem hängt die Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ in Bedingung B3 von den Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ ab. Die Sektorbedingung B3 (siehe Schritt 8) ist jedoch dann sehr einfach zu erfüllen, wenn die Reglermatrizen so berechnet werden, daß die L_2 -Norm der Matrix $\underline{H}(z)$ in der Gleichung

$$\underline{A}_m(z) \underline{B}(z) = [\underline{I} + \underline{H}(z)] [\underline{P}(z) \underline{A}_l(z) + \underline{S}(z) \underline{D}_a(z) \underline{B}(z)] \quad (2.34)$$

möglichst klein wird. Untersuchungen haben ergeben, daß eine numerische Auswertung dieser Gleichung sehr häufig auf einen instabilen Grundregelkreis führt. Nach Bedingung B1 des Stabilitätstheorems 4.1 (Gl.4.15) müssen die linearen Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$ in Gl.(2.34), die zur Stabilitätsanalyse des adaptiven Regelsystems verwendet werden sollen, bereits den linearen Grundregelkreises stabilisieren. Deshalb werden die Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ einfacher durch eine Simulation des adaptiven Regelkreises anhand des Modells der Regelstrecke ermittelt. Werden die Ordnungen der Reglerpolynome $S_{ij}^r(z)$ und $P_{ij}^r(z)$ genügend groß angesetzt, so existiert immer ein linearer Regler, der den Grundregelkreis stabilisiert. Die Parameter des Adaptionsgesetzes müssen dabei entweder anhand von Erfahrungswerten oder durch systematisches Ausprobieren so eingestellt werden, daß das adaptive Regelsystem stabil bleibt. Auf den ersten Blick scheint dieses Vorgehen nicht sinnvoll zu sein, da ja gerade mit Hilfe des Entwurfsverfahrens geeignete Adaptionparameter erst ermittelt werden sollen (siehe Schritt 9,10). Es ist jedoch an dieser Stelle zu beachten, daß eine Stabilitätsüberprüfung nichtlinearer Systeme anhand einer Simulation keine Aussage über die Stabilitätseigenschaften zuläßt. Die Stabilität hängt vielmehr von den den

adaptiven Regelkreis anregenden Signalen ab. Werden die Adaptionparameter dagegen anhand dieses Entwurfsverfahrens ermittelt, so ist eine Stabilitätsaussage nach Gl.(4.22) oder Gl.(4.23a,b) möglich.

Schritt 6: Ansatz geeigneter Adaptionparameter r_1 und a

Die Adaptionparameter r_1 und a werden so bestimmt, daß die im Schritt 1 berechneten Übertragungsnullstellen der Regelstrecke, oder, wenn ein Korrekturnetzwerks eingesetzt wird, der erweiterten Regelstrecke alle in einem Kreis mit dem Radius $\sqrt{r_1}a$ um den Punkt $z = 0$ der z -Ebene liegen. Der Parameter a muß dabei so gewählt werden, daß die Bedingungen aus Satz 3.3 erfüllt sind. In den meisten Fällen ergibt ein Ansatz von

$$r_1 = 0.9 - 0.99, \quad (4.89)$$

gutes Adaptionsverhalten.

Schritt 7: Ermittlung geeigneter Kreissektorgrenzen c und r

Zur Ermittlung geeigneter Kreissektorgrenzen C'_i und R'_i werden die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ der Übertragungsmatrix $H_2(\sqrt{r_1}a e^{j\omega T})$ berechnet und grafisch dargestellt. Alle Ortskurven müssen vollständig innerhalb eines Kreises in der rechten z -Halbebene mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse liegen. Mit Hilfe der Bilder 4.1 und 4.2 werden dann Kreissektorgrenzen c und r bzw. $K_{\min}$ und $K_{\max}$ (siehe Gl.(4.87)) bestimmt, denen Adaptionparameter r_{2i} , f_{1i} und f_{2i} zugeordnet werden können. Diese Parameter können als Anhaltspunkt für den Aufbau der diagonalen Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ verwendet werden.

Schritt 8: Ermittlung der Kreissektorgrenzen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$

Anhand der im Schritt 7 ermittelten Parameter c und r werden diagonale Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ aufgebaut. Dann ist die Berechnung des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ nach Gl.(4.18) für $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$ möglich. Der endgültige Wert der Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ wird iterativ so bestimmt, daß der Wert $\sigma_{\max}(\omega)$ für alle Frequenzen ω kleiner als 1 bleibt. Dazu muß gegebenenfalls der Wert der Elemente der Matrix $\underline{R}'$ solange vergrößert werden, bis die Sektorbedingung nach Gl.(4.18) erfüllt ist.

Schritt 9: Ermittlung der Adaptionparameter f_{1i} , f_{2i} und r_{2i}

Die Ermittlung der Adaptionparameter f_{1i} , f_{2i} und r_{2i} erfolgt anhand der Gl.(4.86), (4.87) und (4.88) oder nach Bild 4.1. Schritt 9 wird in der Regel gleichzeitig mit Schritt 8 bearbeitet.

Schritt 10: Wahl der restlichen Adaptionparameter E_i , r_3 und f_{3i}

Die Adaptionmatrix E_i wird nur in den Algorithmen WFG und WSTA benötigt. Sie entspricht formal der Kovarianzmatrix $\underline{E}(k)$ im WRLS-Algorithmus. E_i wird der Einfachheit halber als Diagonalmatrix angesetzt. Die einzelnen Elemente werden dann so bestimmt, das Unterschiede in den Größenordnungen der zugehörigen Elemente des Signalvektors $\underline{x}_i(k)$ (siehe Gl.(2.64a)) ausgeglichen werden. Die Parameter r_3 und f_{3i} legen den maximalen Wert der Funktionen $r_i(k)$ und $f_i(k)$ bzw. den maximalen Eigenwert der Kovarianzmatrix $\underline{E}_i(k)$ und damit nach Gl.(4.54) den Wert c_{ai} bzw. nach Gl.(4.59) $c_{a,max}$ fest. Nach Gl.(4.23a,b) müssen die Parameter r_3 und $c_{a,max}$ in Abhängigkeit von den den adaptiven Regelkreis erregenden Signalen bestimmt werden. Deshalb werden zunächst sehr kleine Werte für r_3

$$r_3 = 0.01 - 0.0001 \quad (4.90a)$$

und sehr große Werte für den Parameter c_{ai} , z.B. durch

$$f_{3i} = 10^{-3} - 10^{-6} \quad \text{oder} \quad \underline{E}_i = \text{diag} \left\{ 10^2 - 10^4 \right\}, \quad (4.90b)$$

angesetzt, die dann später gegebenenfalls wieder verringert werden können.

Schritt 11: Simulation des adaptiven Regelsystems

Das dynamische Verhalten des adaptiven Regelsystems hängt von der adaptiven Verstärkung der Adaptionsgesetze, vom Parallelmodell und vom Korrekturnetzwerk ab. Gegebenenfalls müssen die Schritte 3, 4, und 9 nochmals durchlaufen werden.

Schritt 12: Erprobung am Prozeß

Im letzten Schritt kann durch vorsichtiges Nachoptimieren der einzelnen Entwurfparameter im laufenden Betrieb das dynamische Verhalten des gesamten Regelsystems nochmals verändert werden.

4.3 Darstellung des Entwurfsverfahrens für eine Regelstrecke mit zwei Ein- und

Ausgängen

Um das Entwurfsverfahren zu veranschaulichen wird im folgenden als Beispiel eine Regelstrecke mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen betrachtet. Es handelt sich dabei um ein Teilsystem des Extrudersmodells, das im nächsten Kapitel noch ausführlicher behandelt wird.

Beispiel :

Die Übertragungsmatrix des betrachteten Teilsystems (Abtastzeit $T = 1$ min) lautet

$$\underline{G}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{2,125 z^{-1}}{1 - 0,9803 z^{-1}} & \frac{0,04121 z^{-1}}{1 - 1,9489 z^{-1} + 0,9496 z^{-2}} \\ \frac{0,011218 z^{-1}}{1 - 1,933 z^{-1} + 0,9336 z^{-2}} & \frac{2,9355 z^{-1}}{1 - 0,978 z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Im ersten Schritt des Entwurfsverfahrens müssen die Übertragungsnullstellen ermittelt werden. Sie ergeben sich zu

$$z_{N1} = 0,9741 \quad \text{und} \quad z_{N2} = 0,9492 . \quad (4.92)$$

Da die diskrete Totzeit jeder Einzelübertragungsfunktion den Wert $d_{ij} = 1$ besitzt, muß im Schritt 2 kein Vorfilter berechnet werden, wenn zunächst vorausgesetzt wird, daß sich die Totzeitstruktur der Regelstrecke nicht ändert. Gleichzeitig entfällt im Schritt 4 die Berechnung eines Korrektornetzwerkes, da nach Gl.(4.92) alle Nullstellen der Regelstrecke innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen. Das Parallelmodell bestimmt in diesem Fall das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Es wird als diagonale Übertragungsmatrix mit Einzelübertragungsfunktionen erster Ordnung mit einer Zeitkonstanten $T_m = 10$ min, d. h.

$$\underline{G}_m(z) = \text{diag} \left\{ \frac{0,09516 z^{-1}}{1 - 0,9048 z^{-1}} \right\} \quad (4.93)$$

angesetzt. Die Regelstrecke soll durch zwei spezielle adaptive Eingrößen-PI-Regler stabilisiert werden. Dann müssen die Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ als diagonale Matrizen der Form

$$\underline{S}(z) = \text{diag} \left\{ S^r(z) \right\} = \text{diag} \left\{ s_0^r + s_1^r z^{-1} \right\} ; \quad \underline{P}(z) = \text{diag} \left\{ p_0^r \right\} \quad (4.94)$$

angesetzt werden. Der I-Anteil im Regler ergibt sich durch den zusätzlichen Integrator im Stellgesetz nach Gl.(4.14) mit $g = 1$. Im fünften Schritt des Entwurfsverfahrens müssen die Koeffizienten der Reglerpolynome $S^r(z)$ und $P^r(z)$ bestimmt werden, so daß sich zum einen ein stabiler Grundregelkreis ergibt und zum anderen die L_2 -Norm der Matrix $\underline{H}_2(z)$ in Gl.(2.34) möglichst klein wird. Dies geschieht am besten durch eine Simulation des adaptiven Grundregelkreises. Dazu werden alle Reglerkoeffizienten bis auf p_0^r zu Beginn der Simulation auf Null gesetzt. Das dynamische Verhalten der Eingangs- und Ausgangssignale während des Adaptionvorgangs ist im Bild 4.4 dargestellt.

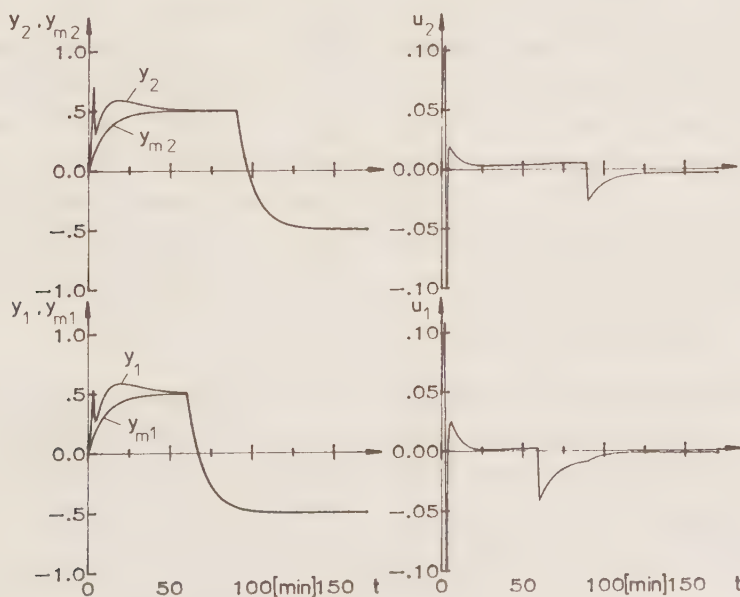


Bild 4.4 Zur Ermittlung der Reglermatrizen $\underline{S}(z)$ und $\underline{P}(z)$

Nach 50 Abtastschritten wird mit der Reglereinstellung

$$S^1(z) = 1.0748 - 0.979 z^{-1}, \quad p^1_0 = 2.1215 \quad (4.95a)$$

$$S^2(z) = 1.0718 - 0.9769 z^{-1}, \quad p^2_0 = 2.9319 \quad (4.95b)$$

das gewünschte Verhalten sehr gut erreicht. An dieser Stelle soll noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Einstellung der Adaptionparameter für diese Simulation durch sukzessives Ausprobieren gefunden werden müssen, da die Ermittlung geeigneter Adaptionparameter, die die Stabilität des adaptiven Regelsystems garantieren, erst im Schritt 9 erfolgt. Dieses Vorgehen erscheint auf den ersten Blick nicht sinnvoll, da ja bereits in diesem Schritt Adaptionparameter gefunden werden müssen. Allerdings ist zu bedenken, daß über die Stabilität des adaptiver Grundregelkreises mit den durch Ausprobieren gefundenen Adaptionparameters keine Aussage gemacht werden kann. Zwar ist dem Bild 4.4 zu entnehmen, daß die Eingangs- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke während der ersten 150 min der Adaption beschränkt bleiben, doch ist über das Langzeitverhalten des Regelkreises keine Aussage möglich. Außerdem hängt die Stabilität des adaptiven Regelkreises stark von der äußeren Erregung, also dem Führungssignal und den Störungen, ab. Eine Stabilitätsüberprüfung anhand der Simulation des adaptiven Regelsystems läßt sich deshalb nicht verallgemeinern. Versuche haben ergeben, daß bereits kleine Änderungen in der Form des Führungssignals, z.B. der Amplitude des erregenden PRBS-Signals, unbeschränkt wachsende Regelgrößen ergeben können. Werden die Adaptionparameter jedoch nach dem hier beschriebenen Entwurfsverfahren ermittelt, so ist die asymptotische Stabilität des adaptiven Regelsystems garantiert.

Im sechsten Schritt des Entwurfsverfahrens müssen geeignete Parameter r_1 und σ ermittelt werden, so daß die Übertragungsnullstellen und Pole der sich mit dem Regler nach Gl.(4.95) ergebenden Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(z)$ betragsmäßig kleiner als $\sqrt{r_1 a}$ sind. Mit dem Ansatz

$$r_1 = 0.99, \quad a = 0.999 \quad (4.96)$$

ergibt sich mit Gl.(4.7) für den maximalen Betrag der Pole und Nullstellen

$$\sqrt{r_1 a} = 0.9945. \quad (4.97)$$

Da die Übertragungsnullstellen der Matrix $H_2(z)$ nach Gl.(2.77a) durch $\underline{A}_m(z)$ und $\underline{B}(z)$ gegeben sind, ist diese Bedingung nach Gl.(4.92) und Gl.(4.93) für die Nullstellen sicher erfüllt. Streng genommen muß die Lage der Pole anhand der Gl.(2.79) untersucht werden. Da jedoch nach Bild 4.4 das Ausgangssignal $\underline{y}(k)$ sehr genau mit dem Modellausgang $\underline{y}_m(k)$ übereinstimmt, kann nach Gl.(4.93) davon ausgegangen werden, daß die Bedingung auch für die Pole erfüllt ist. Damit können im siebten Schritt die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ der Übertragungsmatrix $H_2(\sqrt{r_1}a e^{j\omega T})$ gezeichnet werden. Sie sind im Bild 4.5 dargestellt.

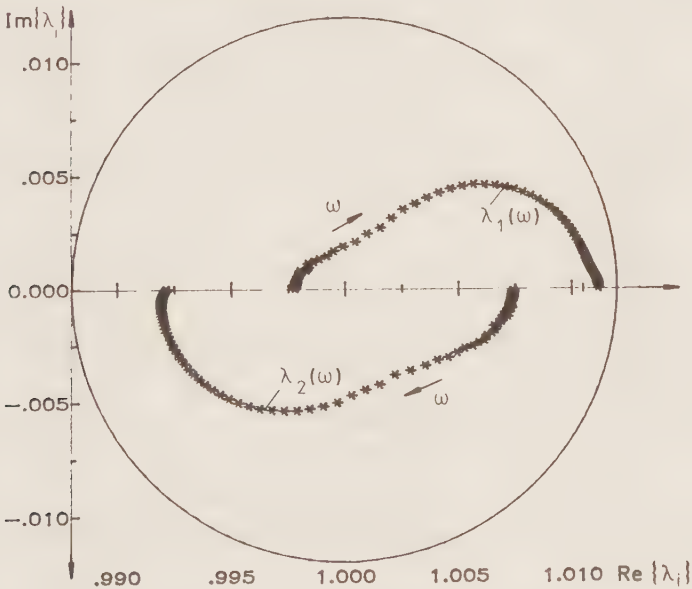


Bild 4.5 Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ der Übertragungsmatrix $H_2(\sqrt{r_1}a e^{j\omega T})$, $0 < \omega < \pi/T$, $\sqrt{r_1}a = 0.9945$

Beide Ortskurven liegen vollständig innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt $c = 1$ und dem Radius $r = 0.012$. Für den WRLS-Algorithmus kann daraus mit dem Ansatz

$$f_{1i} = 0.9 \quad , \quad f_{2i} = 1 \quad (4.98)$$

der Adaptionparameter r_{2i} berechnet werden. Aus Gl.(4.86b,c) ergibt sich

$$r = \sqrt{r_{2i}} f_{1i} c = 0.012 \quad (4.99)$$

$$r_{2i} = (c f_{1i})^{-1} r^2 = 0.00016 . \quad (4.100)$$

Anhand der Parameter c und r werden im achten Schritt diagonale Matrizen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ aufgestellt und der maximale singuläre Wert $\sigma_{\max}(\omega)$ nach Gl.(4.18) gezeichnet (Bild 4.6, Kurve a).

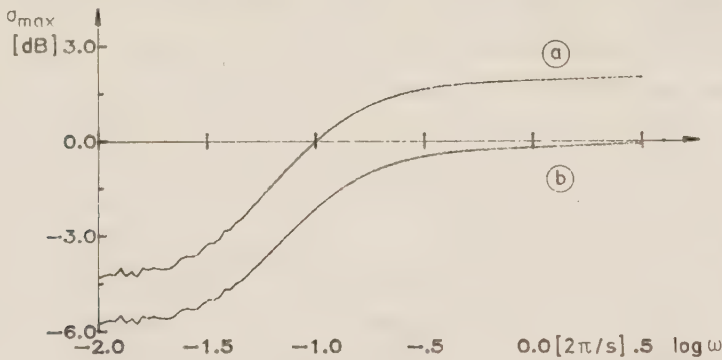


Bild 4.6 Der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$, $0.1 \leq \omega \leq \pi/T$, nach Gl.(4.18),

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{R}' &= \text{diag} \{ 0.012 \}, & \text{b) } \underline{R}' &= \text{diag} \{ 0.0156 \} \\ \underline{C}' &= \text{diag} \{ 1.0 \}, & \underline{C}' &= \text{diag} \{ 0.999 \} \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel werden die Adaptionparameter jedes lokalen Adaptionsgesetzes gleich gewählt. Dann gilt

$$\underline{C}' = \text{diag} \{ c \} , \quad \underline{R}' = \text{diag} \{ r \} . \quad (4.101)$$

Die Sektorbedingung ist nicht erfüllt, da der maximale Wert $\sigma_{\max} = 1.26 \hat{=} 2.0$ dB den Wert 1 übersteigt. Erst wenn der Radius r in Gl.(4.101) auf den Wert $r = 0.0156$ erhöht wird, bleibt der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ für alle Frequenzen ω , $0 \leq \omega < \pi/T$, unterhalb 0-dB Linie (Bild 4.6, Kurve b). Der Adaptionparameter r_2 wird nach Gl.(4.100) berechnet und r_3 und f_3 nach Gl.(4.90a,b) angesetzt zu

$$r_2 = 0.00027 , \quad (4.102)$$

$$r_3 = 0.01 , \quad f_3 = 10^{-5} . \quad (4.103)$$

Damit sind alle Parameter des adaptiven Regelsystems festgelegt. Anhand der Simulation des geschlossenen adaptiven Regelkreises kann jetzt das dynamische Verhalten der Signale während des Adaptionvorgangs überprüft und gegebenenfalls durch die Wahl eines anderen Parallelmodells, Korrekturnetzwerks oder anderer Adaptionparameter beeinflusst werden. Gleichzeitig kann die Robustheit des adaptiven Regelsystems gegenüber Änderungen der Regelstrecke untersucht werden. Bild 4.7 zeigt das dynamische Verhalten der Eingangs- und Ausgangssignale der Regelstrecke $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$, des Modellausgangssignals $\underline{y}_m(k)$, des Adaptionfehlersignals $\underline{e}_m(k)$ und der Elemente $\hat{p}_i^1(k)$ bzw. $\hat{p}_i^2(k)$ der lokalen Reglerparametervektoren für sprungförmige Änderungen der Regelstreckenparameter und des Sollwerts.

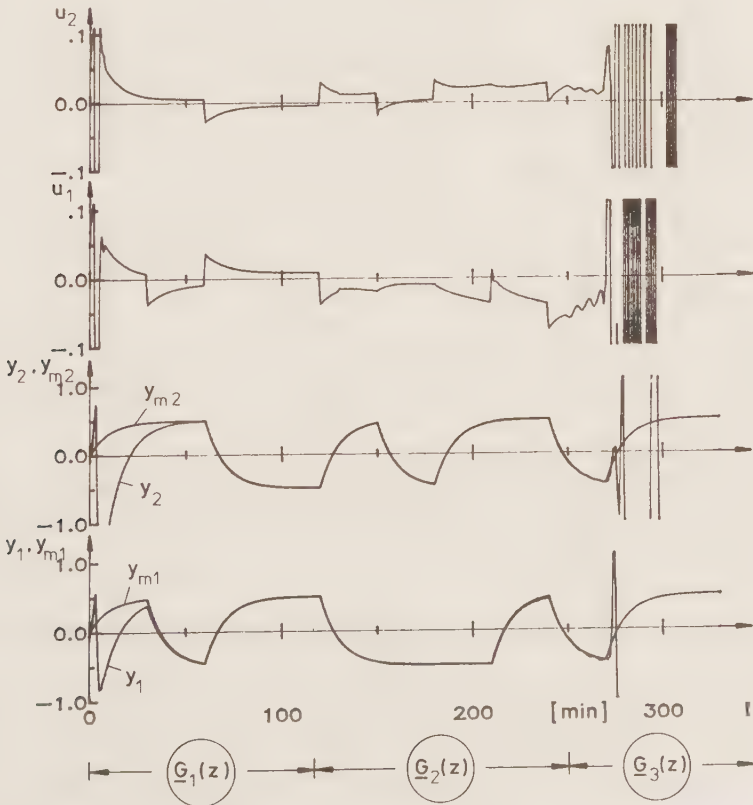


Bild 4.7a Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{y}_m(k)$ des adaptiven Regelsystems bei sprungförmiger Änderung der Streckenparameter und des Sollwerts

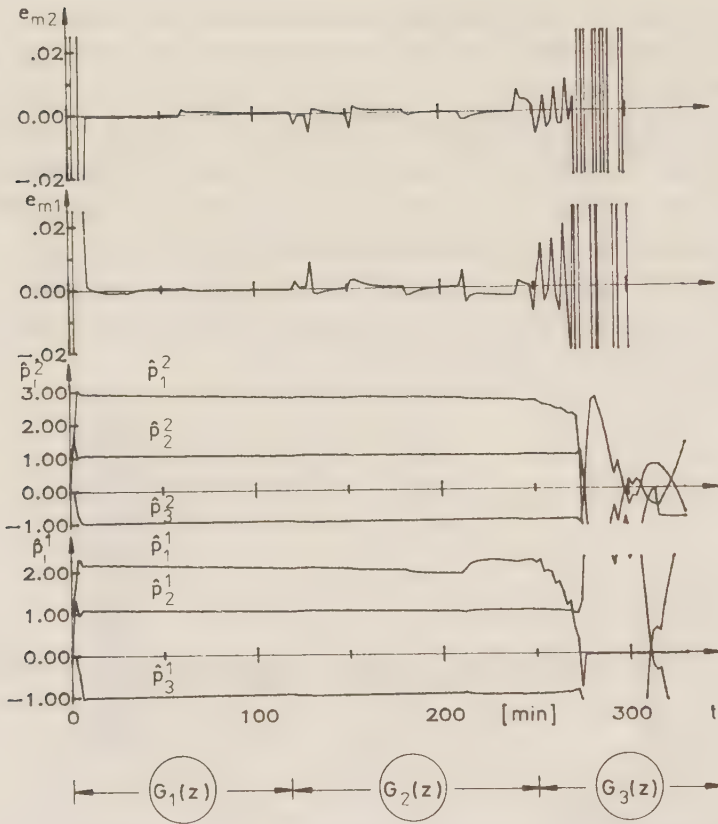


Bild 4.7b Verlauf des Adaptionsfehlersignals $\underline{e}_m(k)$ und der Reglerparameter $\hat{p}_i^r(k)$ des adaptiven Regelsystems bei sprungförmiger Änderung der Streckenparameter und des Sollwertes

Zum Zeitpunkt $k=0$ werden alle Reglerparameter $\hat{s}_i^r(k)$ auf den Wert Null und die Koeffizienten $\hat{p}_0^r(k)$ auf den Wert 1 gesetzt. Die Startwerte der Kovarianzmatrizen $\underline{E}_i(k)$ und der Gewichtungsfaktoren $r_i(k)$ betragen

$$\underline{E}_i(0) = \text{diag} \left\{ 10^4 \right\}, \quad r_i(0) = 1. \quad (4.104)$$

Zum Zeitpunkt $t = 120$ min wird die Verstärkung der Nebendiagonalelemente der Übertragungsmatrix der Regelstrecke um den Faktor 4 ($G_{12}(z)$) bzw. 10 ($G_{21}(z)$) er-

hört und die Zeitkonstanten der Hauptdiagonalelemente werden um 20% verringert. Nach 250 min wird auf die ursprüngliche Regelstrecke nach Gl.(4.91), jedoch mit einer erhöhten diskreten Totzeit $d_{ii} = 2$ der Hauptdiagonalelemente, zurückgeschaltet. Die Übergangsfunktionen der drei Regelstrecken sind im Bild 4.8 dargestellt.

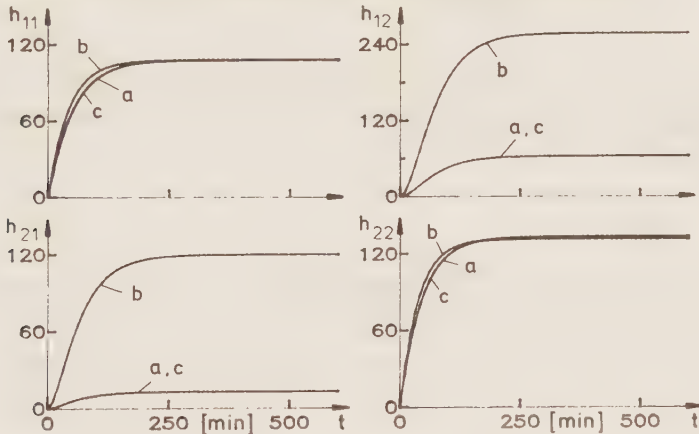


Bild 4.8 Übergangsfunktionen der Regelstrecken a) $\underline{G}_1(z)$, b) $\underline{G}_2(z)$ und c) $\underline{G}_3(z)$ zu Bild 4.7a,b

Bereits nach wenigen Abtastschritten ist der Adaptionsvorgang nahezu abgeschlossen und die Reglerparameter bleiben näherungsweise konstant. Das gewünschte dynamische Verhalten wird sehr gut erreicht und ändert sich kaum, wenn nach 120 Minuten die Kopplungen der Regelstrecke sehr stark erhöht werden. Das geänderte dynamische Verhalten der Regelstrecke ist jedoch anhand des unterschiedlichen Verlaufs der Stellgrößen gut zu erkennen. Die Stabilität des adaptiven Regelsystems ist in diesem Fall jedoch nicht mehr garantiert, hier muß gegebenenfalls das gesamte Entwurfsverfahren für die geänderte Regelstrecke $\underline{G}_2(z)$ nach Bild 4.8 wiederholt werden.

Während das dezentrale adaptive Regelsystem sehr robust gegenüber Änderungen der Parameter der Regelstrecke ist, führt eine Änderung der Totzeiten der Regelstrecke sofort auf einen instabilen Regelkreis, auch wenn diese Änderung anhand der Sprungantworten der Regelstrecke im Bild 4.8 kaum feststellbar ist. Die Totzeiten der Regelstrecke müssen also sehr genau bekannt sein. Sollen auch variable Totzeiten be-

rücksichtigt werden, so muß im Schritt 4 des Entwurfsverfahrens (s. Bild 4.3) ein Korrektornetzwerk eingesetzt werden. Es läßt sich anhand der Gl.(4.83) einfach ermitteln

$$\underline{G}_{k1}(z) = \frac{K_1 (1 - z^{-1})}{1 - 0.98 z^{-1}} z^{-1}, \quad \underline{G}_{k2}(z) = \frac{K_2 (1 - z^{-1})}{1 - 0.978 z^{-1}} z^{-1}. \quad (4.105)$$

Das dynamische Verhalten des Regelkreises wird in diesem Fall auch durch das Korrektornetzwerk bestimmt (Hahn, 1983). Zur Vereinfachung wird das Parallelmodell als Einheitsmatrix

$$\underline{G}_m(z) = I \quad (4.106)$$

angesetzt. Die Anstiegszeit der Regelgrößen kann dann durch die Parameter K_1 und K_2 in Gl.(4.105) beeinflusst werden. Der Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ für den Fall, daß alle Reglerparameter $\hat{s}_i^r(k)$ zum Zeitpunkt $k = 0$ auf Null und die Parameter $\hat{p}_0^r(k)$ auf 1 gesetzt werden, ist im Bild 4.9 dargestellt. Mit

$$K_1 = 15, \quad K_2 = 20 \quad (4.107)$$

ergibt sich für die Regelstrecke $\underline{G}_1(z)$ nach Gl.(4.91) nach Abschluß der ersten Phase der Anfangsadaptation nahezu das gleiche dynamische Verhalten der Ausgangssignale $\underline{y}(k)$ wie im Bild 4.7a. Das Korrektornetzwerk dämpft die Stellgrößen und damit auch die Regelgrößen. Deshalb ist während der Adaptionsphase kein Überspringen der Regelgrößen zu beobachten. Bild 4.10, Kurve a, zeigt den Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ nach Gl.(4.18) für das Korrektornetzwerk nach Gl.(4.105) bzw. Gl.(4.107) und die Regelstrecke $\underline{G}_1(z)$ nach Bild 4.8.

Werden zur Berechnung von $\sigma_{\max}$ die gleichen Sektorgrenzen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ wie im Bild 4.6b und damit die gleichen Adaptionsparameter r_2 , f_1 und f_2 wie im vorherigen Versuch (Bild 4.7) gewählt, so ergibt sich mit $\sigma_{\max} = 0.43 \hat{=} -7.3$ dB ein deutlich größerer Abstand zur 0-dB Linie. Der Faktor r_2 kann dann auf den Wert $5.5 \cdot 10^{-5}$ verkleinert werden (Bild 4.10, Kurve b).

Bei stark verkoppelten Regelstrecken wirkt sich das Korrektornetzwerk nachteilig auf das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises aus. Während im Bild 4.7b die

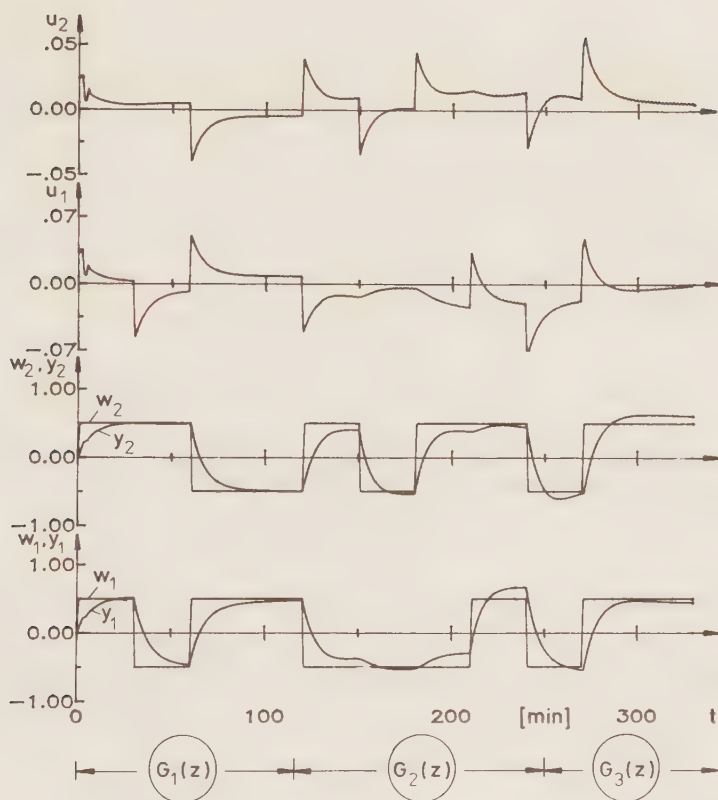


Bild 4.9 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ des adaptiven Regelsystems mit Korrekturnetzwerk bei sprungförmiger Änderung der Streckenparameter und des Sollwerts

Signale $\underline{y}_i(k)$ nahezu entkoppelt voneinander sind, ist im Bild 4.9 nach dem Umschalten auf die Regelstrecke $\underline{G}_2(z)$ zum Zeitpunkt $k = 120$ deutlich zu erkennen, daß das Verhalten einer Regelgröße auch von jeweiligem Verlauf der anderen Regelgröße abhängt. Dieser Einfluß kann durch eine on-line Optimierung des Korrekturnetzwerks in Abhängigkeit von den jeweiligen Streckenparametern verringert werden (Wiemer, 1987). Im Gegensatz zum vorherigen Versuch führt eine Vergrößerung der diskreten Totzeiten d_i der Regelstrecke zum Zeitpunkt $k = 250$ nicht auf einen instabilen Regelkreis.

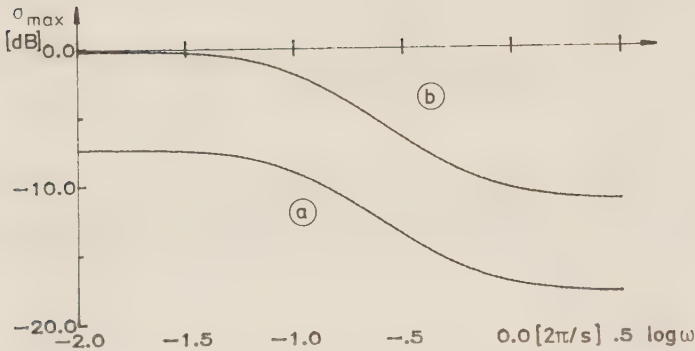


Bild 4.10 Der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$, $0 \leq \omega \leq \pi/T$, nach Gl.(4.18) mit Korrektornetzwerk, $\underline{C}' = \text{diag} \{ 0.999 \}$
a) $\underline{R}' = \text{diag} \{ 0.0156 \}$ b) $\underline{R}' = \text{diag} \{ 0.007 \}$

Im folgenden sollen die Konvergenzeigenschaften der drei im Kapitel 3 vorgestellten Adaptionalgorithmen WFG, WSTA und WRLS noch eingehender untersucht werden. Als Gütemaß wird dazu die Verlustfunktion für jedes Adaptionsefehlersignal

$$e_{Li}(N) = \sum_{k=0}^N e_{mi}^2(k) \tag{4.108}$$

definiert. Im Bild 4.11 ist der Verlauf der Verlustfunktionen für den adaptiven Regelkreis ohne Korrektornetzwerk mit WRLS Parameterschätzung für die Regelstrecke $\underline{G}_1(z)$ nach Gl.(4.92) für verschiedene Kombinationen der Adaptionparameter f_1 und r_2 dargestellt. Die Parameter f_1 und r_2 werden dabei so berechnet, daß sich immer die gleichen Sektorgrenzen $\underline{C}'$ und $\underline{R}'$ nach Gl.(4.20) und die gleichen Maximalwerte der Kovarianzmatrizen $\underline{E}_i(k)$ (Gl.(3.101)) und der Gewichtungsfaktoren $r_i(k)$ (Gl.(3.53c)) ergeben. Durch Verkleinerung des Adaptionparameters f_1 kann die Konvergenzgeschwindigkeit des WRLS-Algorithmus erhöht werden. Gleichzeitig ergibt sich aber in den meisten Fällen ein höherer stationärer Endwert der Verlustfunktion. Deshalb muß im Einzelfall ein vernünftiger Kompromiß gefunden werden. Wie aus dem Verlauf der Verlustfunktionen im Bild 4.12 ersichtlich ist, gilt die Aussage auch für den WSTA-Algorithmus. Neben den Adaptionparametern f_1 und r_2 beeinflußt in diesem Fall die

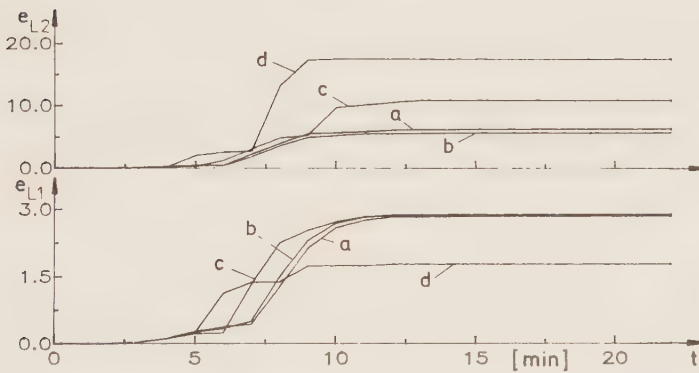


Bild 4.11 Verlauf der Verlustfunktionen für den WRLS-Algorithmus, $\underline{C}' = \underline{I}$,

$$\underline{R}' = \text{diag} \left\{ 0.0156 \right\}, \quad \underline{F}_i(0) = \underline{I}, \quad r_i(0) = 1$$

$$\text{a) } f_1 = 0.99, \quad r_2 = 2.4 \cdot 10^{-4} \quad \text{c) } f_1 = 0.5, \quad r_2 = 4.8 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{b) } f_1 = 0.9, \quad r_2 = 2.7 \cdot 10^{-4} \quad \text{d) } f_1 = 0.1, \quad r_2 = 2.4 \cdot 10^{-3}$$

Gewichtsmatrix $\underline{F}_i$ entscheidend das Adaptionverhalten. Für den Versuch nach Bild 4.12 wurde jede Matrix $\underline{F}_i$ als

$$\underline{F}_i = \text{diag} \left\{ F \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.109)$$

angesetzt. Mit steigenden Werten für den Parameter F ergibt sich sowohl eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit als auch ein geringerer stationärer Endwert der Verlustfunktion. Deshalb sollten die Elemente der Matrizen $\underline{F}_i$ Werte zwischen 10^2 und 10^4 annehmen (siehe Gl.(4.91b)).

Um die Konvergenzeigenschaft der Algorithmen WRLS und WSTA mit der des WFG-Algorithmus vergleichen zu können, muß zunächst ein geeigneter Adaptionparameter r_2 berechnet werden, so daß sich ein garantiert stabiles adaptives Regelsystem ergibt. Nach Gl.(4.86) müssen dazu aus Bild 4.5 Kreisparameter c und r bestimmt werden, so daß die Ortskurven der komplexen Eigenwerte vollständig innerhalb dieses Kreises liegen. Die Sektorbedingung nach Schritt 8 des Entwurfsverfahrens ist für

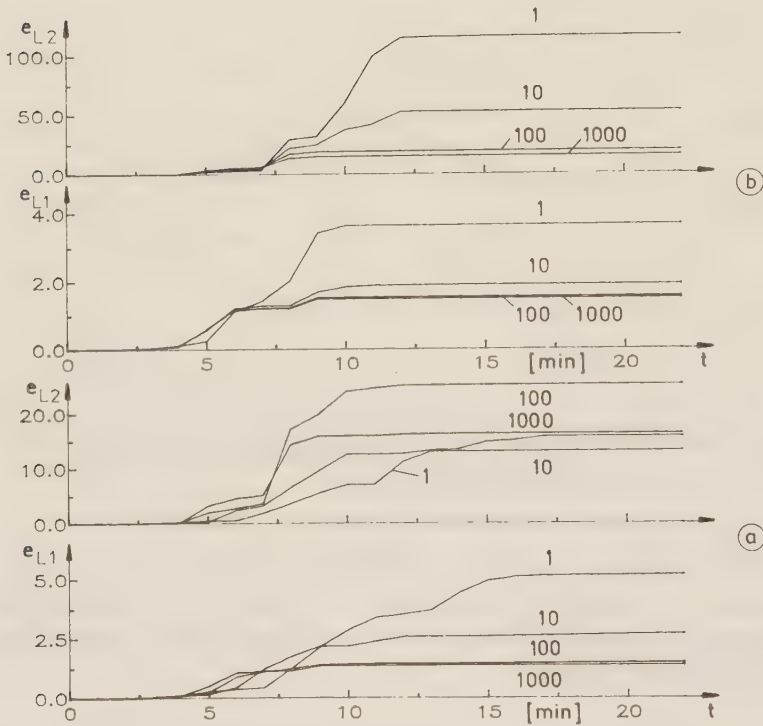


Bild 4.12 Verlauf der Verlustfunktionen für den WSTA-Algorithmus $f_i(0) = 1$, $r_i(0) = 1$

und $\underline{C}' = \underline{I}$, $\underline{R}' = \text{diag} \left\{ 0.0156 \right\}$, $F = 1, 10, 100, 1000$

a) $f_1 = 0.99$, $r_2 = 2.4 \cdot 10^{-4}$ b) $f_1 = 0.1$, $r_2 = 2.4 \cdot 10^{-3}$

$$r_1 = 0.99, \quad r_2 = 1, \quad \sigma = 0.001 \quad (4.110)$$

erfüllt. Aus dem Verlauf der Verlustfunktionen im **Bild 4.13** für verschiedene Parameter F nach Gl.(4.108) folgt die gleiche Aussage wie für den WSTA-Algorithmus. Das Konvergenzverhalten beider Adaptionsgesetze kann durch entsprechende Wahl der Gewichtsmatrizen $\underline{F}_i$ verbessert werden.

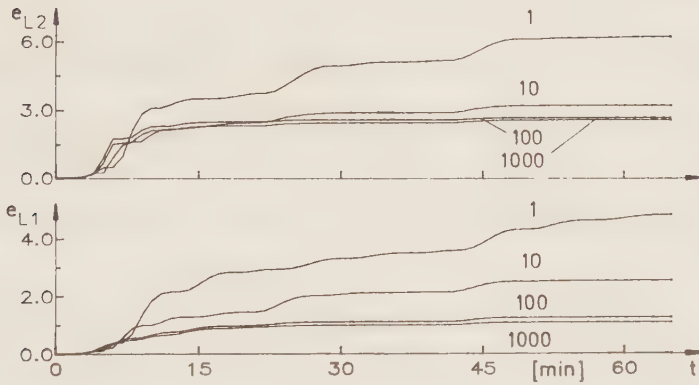


Bild 4.13 Verlauf der Verlustfunktionen für den WFG-Algorithmus, $r_1 = 0.99$, $r_2 = 1$, $r_1(0) = 1$, $F = 1, 10, 100, 1000$

Ein Vergleich der drei Adaptionalgorithmen untereinander ergibt folgende Werte für die mittlere Konvergenzdauer

WRLS	10 Abtastschritte
WSTA	10 - 15 Abtastschritte
WFG	30 - 70 Abtastschritte .

Ist eine schnelle Adaption der Reglerparameter gefordert, so ist der Einsatz des WRLS-Algorithmus angebracht.

5. Beispiele

5.1 Simulation des adaptiven Regelkonzepts anhand des Modells eines Extruders

Ein *Extruder* ist eine kontinuierlich arbeitende Fördermaschine, in der unter Druck und Wärme Kunststoffgranulat aufgeschmolzen, verdichtet und homogenisiert wird. Bild 5.1 zeigt die schematische Darstellung eines Extruders mit 4 Heizzonen.

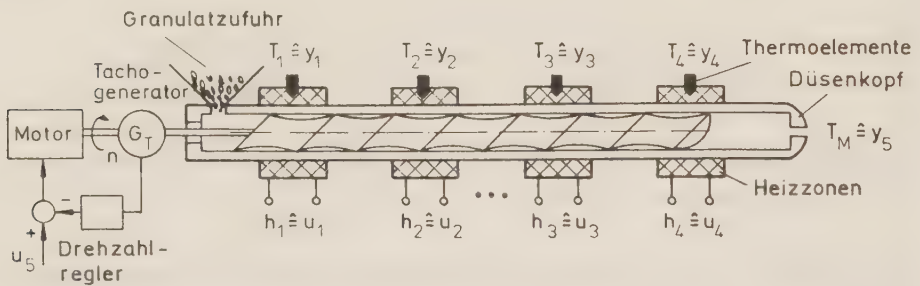


Bild 5.1 Schematische Darstellung eines Extruders mit 4 Heizzonen

Über einen Einfülltrichter gelangt Granulat in den Extrudierzylinder, in dem es durch eine Förderschnecke zu den einzelnen Heizzonen transportiert wird. Dort heizt sich die Kunststoffmasse an der Zylinderinnenseite auf. Durch die Rotation der Schnecke werden die aufgeschmolzenen Teilchen an der Zylinderwand abgeschabt und neue Masse zugeführt bis das Granulat vollständig aufgeschmolzen ist. Im weiteren Verlauf des Schmelzetransports erfolgt die Verdichtung und die Homogenisierung, so daß die Masse nach dem Verlassen des Zylinders von einem Werkzeug geformt werden kann. Durch die Reibung der Masseteilchen untereinander wird in der Schnecke selbst Energie, die sogenannte Friktionsenergie, frei. Da diese Energie in starkem Maße von der Drehzahl der Schnecke abhängt, kann der Aufschmelzvorgang nicht nur durch die Heizleistung der einzelnen Heizzonen, sondern auch durch die Drehzahl beeinflusst werden.

Die Qualität des Extrudates ist im wesentlichen von der Viskosität und der Homogenität der Schmelze abhängig. Diese Prozeßgrößen sind jedoch nur mit großem technischen

Aufwand zu messen. Deshalb wird die Massetemperatur der Schmelze im frei durchströmten Kanal vor dem Düsenkopf als Qualitätsmaß verwendet. Gleichzeitig beeinflusst auch das Massetemperaturprofil entlang des gesamten Extrudierzylinders den Aufschmelzvorgang und damit die Qualität des Extrudates. Da die Massetemperatur in dem Bereich der Schnecke nicht gemessen werden kann, wird statt dessen die Temperatur in der Zylinderwand über Thermoelemente erfaßt.

Das Ziel einer Extruderregelung ist es, die vier Temperaturen in den Heizzonen $T_1, \dots, T_4$ und die Massetemperatur T_M auf einem vorgeschriebenen Wert zu halten. Als Stellgrößen stehen dazu die Heizleistungen der einzelnen Heizzonen $h_1, \dots, h_4$, und der Sollwert eines unterlagerten Drehzahlregelkreises für den Schneckenantrieb zur Verfügung. Da die Temperatur in jeder Heizzone auch von den benachbarten Heizzonen abhängt und die Massetemperatur außer von der Drehzahl auch von jeder Heizzone beeinflusst wird, muß zur Beschreibung der Dynamik des Extruders ein Mehrgrößenmodell mit 5 Eingangsgrößen und 5 Ausgangsgrößen verwendet werden. Ein entsprechendes Modell des Übertragungsverhaltens eines Extruders wurde von H.J. Bergeman (1985) erstellt und von M. Peis (1987) soweit reduziert, daß jedes Element der Übertragungsmatrix durch eine Übertragungsfunktion maximal zweiter Ordnung beschrieben werden kann. In dem Modell werden nur die Kopplungen zwischen zwei benachbarten Heizzonen berücksichtigt. Damit ergibt sich folgende Struktur der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & G_{23}(z) & 0 & 0 \\ 0 & G_{32}(z) & G_{33}(z) & G_{34}(z) & 0 \\ 0 & 0 & G_{43}(z) & G_{44}(z) & 0 \\ G_{51}(z) & G_{52}(z) & G_{53}(z) & G_{54}(z) & G_{55}(z) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Die Übertragungsfunktionen auf der Hauptdiagonalen von $\underline{G}(z)$ werden durch Verzögerungsglieder erster Ordnung, die Kopplungen durch Übertragungsfunktionen zweiter Ordnung beschrieben. Die simulierten Sprungantworten, Abtastzeit $T = 1$ min, sind im Bild 5.2 dargestellt.

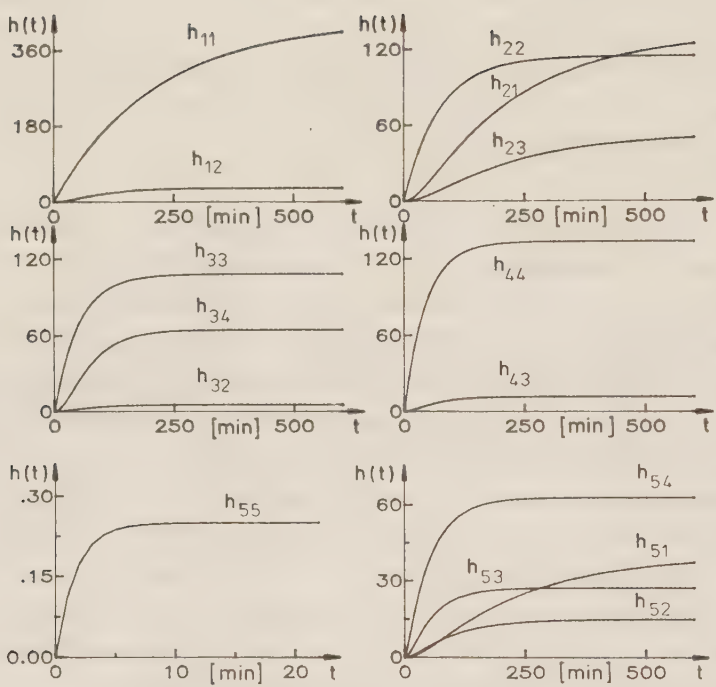


Bild 5.2 Simulierte Sprungantworten des Extrudermodells

Tabelle 5.1 zeigt die Normierung der Stell- und Regelgrößen.

$\Delta u_{1...4} = \pm 1$	$\Delta u_5 = \pm 1$	$\Delta y_{1...4} = \pm 1$	$\Delta y_5 = \pm 1$
$\Delta h_{1...4} = \pm 1 \text{ KW}$	$\Delta n = \pm 1 \text{ U/min}$	$\Delta T_{1...4} = \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta T_M = \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}$

Tabelle 5.1 Normierung der Stell- und Regelgrößen

Eine Erhöhung der Drehzahl des Schneckenantriebs wirkt sich bedingt durch die erhöhte Reibung der Masseteilchen untereinander zunächst auf die Temperatur der Schmelze und damit auf die Massetemperatur T_M aus. Die Aufheizung des Extrudier-

zylinders durch die Schmelze kann selbst wegen der relativ hohen Fördergeschwindigkeit der Schnecke vernachlässigt werden. Die Temperaturen $T_1, \dots, T_4$ in den einzelnen Heizzonen und dann nicht von der Drehzahl n abhängig. Während sich Änderungen der Drehzahl n sehr schnell auf die Massetemperatur auswirken, die Übergangsfunktion $h_{55}(k)$ im Bild 5.2 erreicht nach ca. 10 Minuten den stationären Endwert, machen sich Änderungen in der Heizleistung der einzelnen Heizzonen erst sehr viel später bemerkbar. Die Anstiegszeit aller übrigen Übergangsfunktionen $h_{ij}(k)$ hat einen ca. 10-30mal höheren Wert. Deshalb ist die Drehzahl zur Regelung der Massetemperatur und damit der Qualität des Extrudates sehr gut geeignet. Da sich Störungen in den Heizzonen auch auf die Massetemperatur auswirken, werden die Temperaturen $T_1, \dots, T_4$ über lokale Regelungen der jeweiligen Heizleistung konstant gehalten. Somit ergibt sich eine vollständig dezentrale Struktur der Extruderregelung.

Für den Entwurf des dezentralen adaptiven Regelsystems kann auf die Erfahrungen mit dem 2x2 Teilmodell der Heizzonen 3 und 4 des Extruders in Kapitel 4.4.3 zurückgegriffen werden. Das vollständige Modell des Extruders ist stabil und minimalphasig. Dann ist der Einsatz eines Korrekturnetzwerks theoretisch nicht erforderlich. Aus den Überlegungen im Kap. 4.4.3 ist jedoch ersichtlich, daß bei dem Einsatz des adaptiven Reglers an realen Anlagen immer ein Korrekturnetzwerk verwendet werden sollte, um das adaptive Regelsystem robust gegenüber Änderungen in der Struktur der Regelstrecke, z.B. Totzeitänderungen, zu machen. Das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises im angepaßten Zustand hängt dann sowohl vom Korrekturnetzwerk als auch vom Parallelmodell ab. Für die Simulation wird ein Parallelmodell mit einer Zeitkonstanten $T_m = 5 \text{ min}$ und der Übertragungsfunktion

$$\underline{G}_m(z) = \text{diag} \left\{ \frac{0.182 z^{-1}}{1 - 0.818 z^{-1}} \right\} \quad (5.2)$$

sowie ein Korrekturnetzwerk nach Gl.(4.83) angesetzt. Die Vorfaktoren K_i des Korrekturnetzwerks werden dabei so gewählt, daß nach einer Änderung des Sollwertes alle Ausgangsgrößen $y_i(k)$ nach ca. 30 Minuten den stationären Endwert erreichen.

Die Berechnung geeigneter Adaptionparameter erfolgt mit Hilfe des im Kapitel 4.2 dargestellten Entwurfsverfahrens. Für die vier Heizzonen werden die Reglerpolynome

nach Gl.(4.94) verwendet, so daß sich bei einer Berücksichtigung des zusätzlichen Integrators im Stellgesetz nach Gl.(4.14) vier spezielle adaptive PI-Regler ergeben. Die Reglerpolynome für die Regelung der Massetemperatur werden zu $n_s^5 = 2$ und $n_p^5 = 2$ angesetzt, da sich damit ein besseres dynamisches Verhalten der Massetemperatur erzielen läßt.

Bedingt durch die großen Unterschiede in den Verstärkungen und den Zeitkonstanten des Extrudermodells ergibt sich bei der Berechnung der Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ der Übertragungsmatrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T})$ und der maximalen singulären Werte $\sigma_{\max}(\omega)$ nach Gl.(4.18) bei kleinen Frequenzen eine schlecht konditionierte Matrix. Deshalb wird zur Stabilitätsanalyse ein normiertes Extrudermodell, bei dem die Verstärkungen aller Hauptdiagonalelemente auf den Wert 1 normiert werden, verwendet (siehe Bild 5.3).

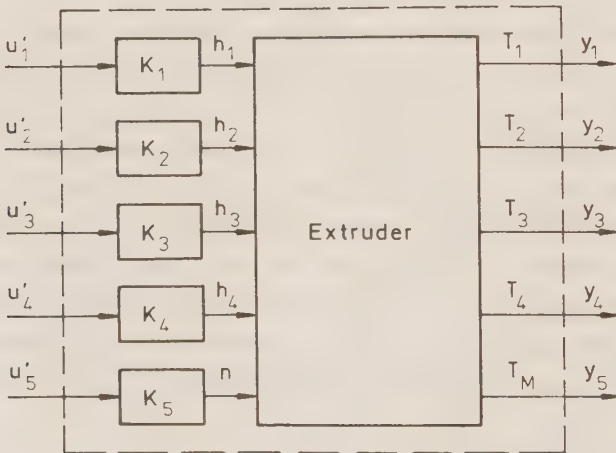


Bild 5.3 Normiertes Extrudermodell

Bild 5.4 zeigt den Verlauf der Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ und des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ für die Frequenzen $0.2 \leq \omega \leq \pi/T$. Da keine Kopplungen zwischen der Stellgröße $u_5(k)$ und den Regelgrößen $y_1(k), \dots, y_4(k)$ vorliegt, kann der Regler für die Ausgangsgröße $y_5(k)$ so eingestellt werden, daß der Eigenwert $\lambda_5(\omega)$ für alle Frequenzen exakt im Punkt $(1, 0)$ liegt. Die restlichen Reglerparameter werden mit Hilfe einer

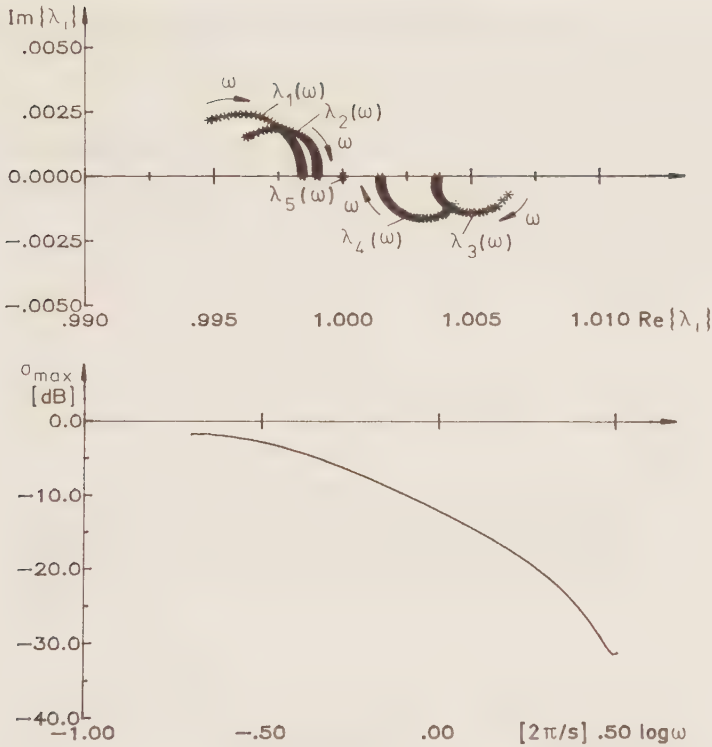


Bild 5.4 Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ und der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$, $0.2 \leq \omega \leq \pi/T$, $a = 0.999$, $r_1 = 0.99$

Simulation des adaptiven Regelsystems ermittelt. Bild 5.4 macht deutlich, daß die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ nicht immer einen guten Anhaltswert für die Parameter R'_i und C'_i liefern. Obwohl alle Eigenwerte sehr nahe bei dem Punkt (1,0) liegen, müssen die Kreissektorparameter $\underline{R}'$ und $\underline{C}'$ so angesetzt werden

$$\underline{R}' = \text{diag} \left\{ 0.15 \right\}, \quad \underline{C}' = \underline{I}, \quad (5.3)$$

daß sich ein um den Faktor 20 größerer Radius R'_i für den Stabilitätssektor ergibt. Die entsprechenden Adaptionparameter für den WRLS-Algorithmus lauten

$$f_{1i} = 0.9, \quad f_{2i} = 0.98, \quad r_{2i} = 0.0252, \quad i = 1, \dots, q. \quad (5.4)$$

Für die restlichen Adaptionsparameter werden folgende Werte gewählt

$$r_1 = 0.99, \quad r_3 = 0.01, \quad f_{3i} = 10^{-5}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (5.5)$$

Der Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ für den Fall, daß zum Zeitpunkt $k=0$ alle Reglerparameter auf den Wert Null und die Parameter $\hat{p}_0^r(k)$ auf den Wert 1 gesetzt wurden, ist im Bild 5.5 dargestellt.

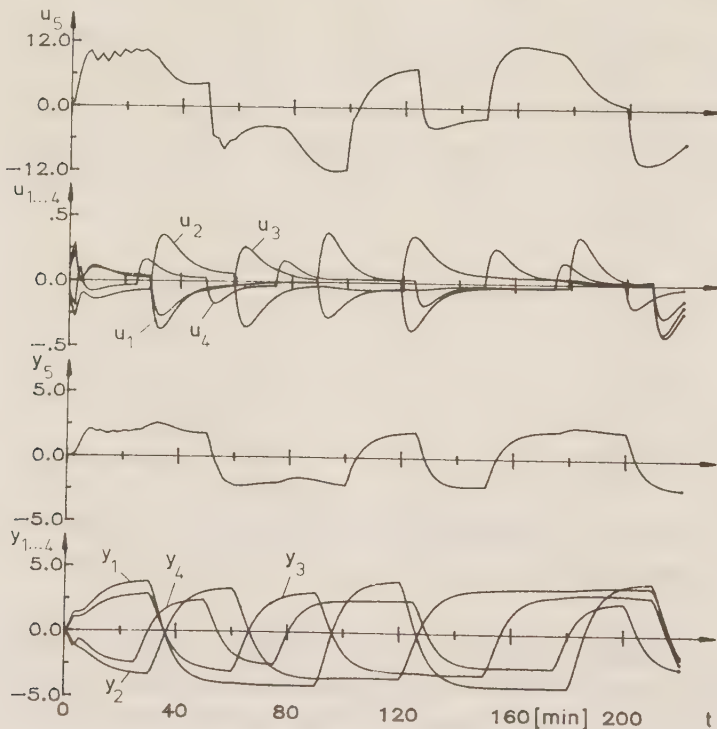


Bild 5.5 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ des adaptiven Regelsystems bei sprungförmiger Änderung des Sollwerts

Bereits nach wenigen Schritten hat sich jeder lokale Regler so eingestellt, daß sich das gewünschte dynamische Verhalten der Ausgangsgrößen $y_i(k)$ ergibt. Durch die dezentrale Regelung können die einzelnen Temperaturen fast vollständig entkoppelt werden. Lediglich eine Änderung der Heizleistung h_4 in der letzten Heizzone vor dem Düsen-

kopf wirkt sich noch etwas auf die Massetemperatur aus. Dieser Zusammenhang wird noch einmal im Bild 5.6 verdeutlicht. Dort ist das Störverhalten des dezentralen adaptiven Regelsystems für eine konstante Störung des Streckenausgangs y_4 zum Zeitpunkt $k=0$ dargestellt. Eine Störung von 5°C ist nach ca. 30 Minuten ausgeglichen. Die maximale Abweichung der Massetemperatur vom Sollwert beträgt $\Delta T_M = 0.59^\circ\text{C}$.

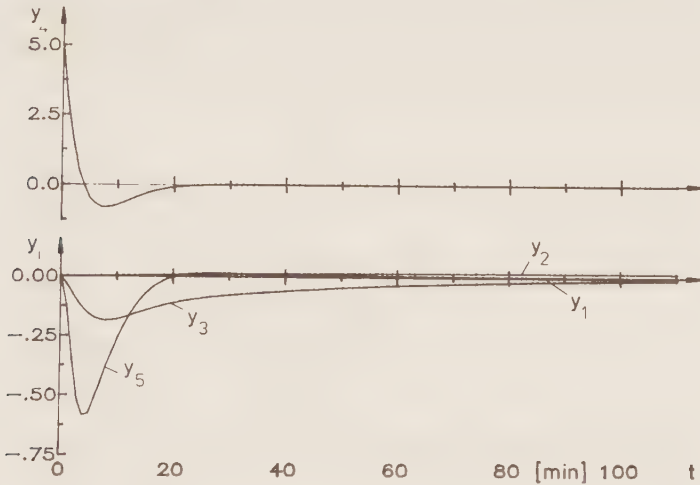


Bild 5.6 Verlauf der Signale $y_i(k)$ des adaptiven Regelsystems bei einer sprungförmigen Störung des Ausgangs y_4

Bei vielen Anlagen der chemischen Verfahrenstechnik kann aus Sicherheitsgründen auf eine klassische Regelung nicht verzichtet werden, damit nach einem möglichen Ausfall des Prozeßrechners die Anlage noch betrieben werden kann. Dies ist z.B. bei einer Kaskadenstruktur nach Bild 5.7 möglich.

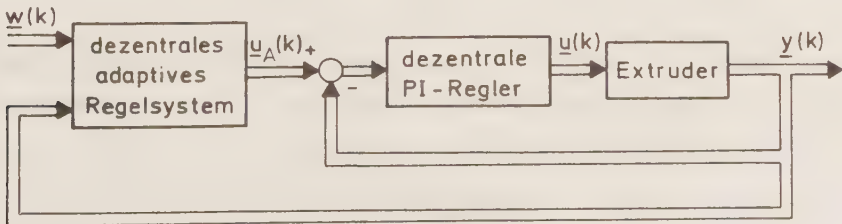


Bild 5.7 Dezentrale adaptive Kaskadenregelung des Extruders

Der dezentrale adaptive Regler im äußeren Regelkreis liefert die Sollwerte $\underline{u}_A(k)$ für den unterlagerten linearen Regelkreis. Im folgenden soll gezeigt werden, daß durch die Verwendung solch einer Kaskadenstruktur die Bedingungen für den Einsatz des dezentralen adaptiven Regelsystems verbessert werden können. Dazu werden die PI-Regler im inneren Regelkreis so ausgelegt, daß bei einer Änderung der Führungsgrößen $\underline{u}_A(k)$ für den unterlagerten Regelkreis die Ausgangsgrößen der Regelstrecke den neuen Sollwerten bereits nach 20-40 Minuten folgen (Bild 5.8).

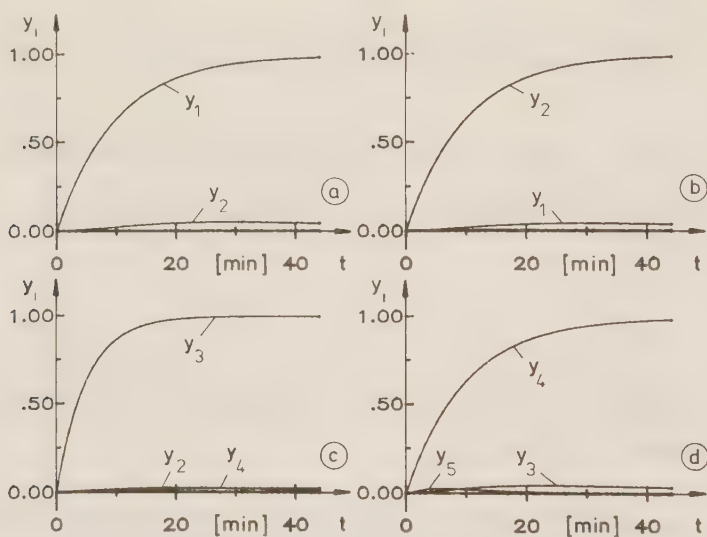


Bild 5.8 Verlauf der Ausgangsgrößen $y_i(k)$ für eine sprungförmige Änderung jeweils eines Sollwertes $u_{Ai}(k)$ für den unterlagerten Regelkreis

a) $u_{A1}(k)$ b) $u_{A2}(k)$ c) $u_{A3}(k)$ d) $u_{A4}(k)$

Durch den Einsatz dezentraler PI-Regler kann der Extruder fast vollständig entkoppelt werden. Wird dann im äußeren Regelkreis ein dezentraler adaptiver Regler eingesetzt, so gilt nach Gl.(2.90a) bzw. Gl.(2.90b)

$$\underline{H}_2(z) \approx \underline{I} \quad , \quad \underline{H}_3(z) \approx \underline{0} \quad . \quad (5.6)$$

Im Idealfall einer vollständigen Entkopplung ist das adaptive Regelsystem dann für beliebige Adaptionparameter f_{1i} , f_{2i} und r_{2i} garantiert stabil. Bei dem praktischen Einsatz des dezentralen adaptiven Regelsystems werden die Adaptionparameter so gewählt, daß der Radius r des zugehörigen Stabilitätssektors nicht zu klein wird. Hier wird zur Simulation der gesamten adaptiven Kaskadenstruktur die gleiche Einstellung der Adaptionparameter wie im Versuch zu Bild 5.5 gewählt. Das dynamische Verhalten der Signale $\underline{y}(k)$ und $\underline{u}(k)$ während der ersten 220 Minuten nach dem Start der Adaption und das Störverhalten bei einer Ausgangsstörung der Temperatur T_4 von 5°C zeigt Bild 5.9.

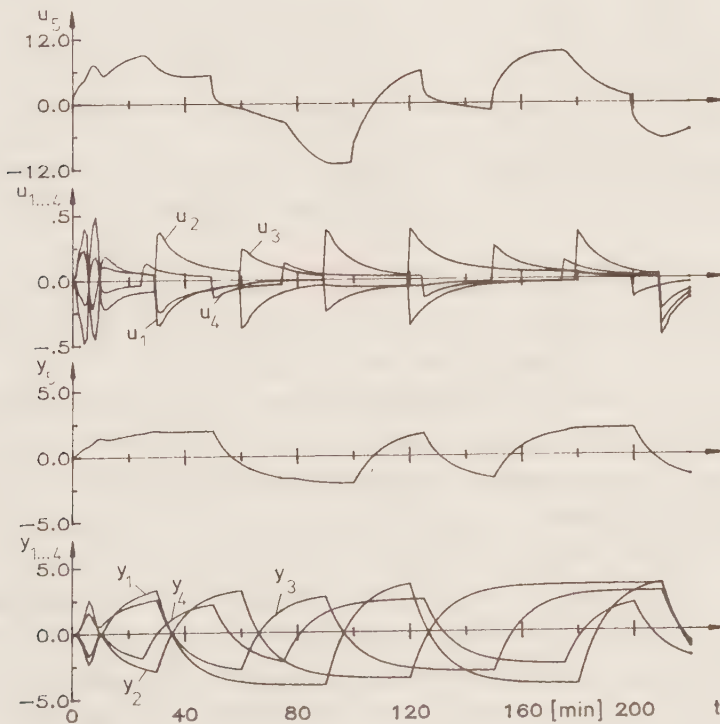


Bild 5.9a Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ des adaptiven Regelsystems mit unterlagter Kaskade bei sprungförmiger Änderung des Sollwerts

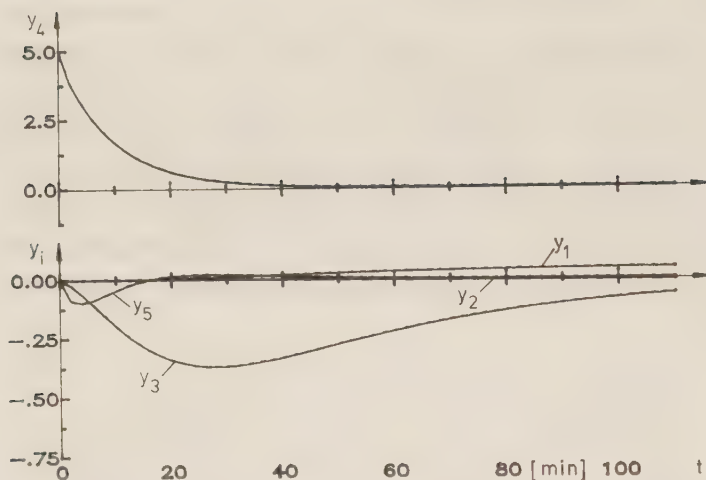


Bild 5.9b Verlauf der Signale $\underline{y}(k)$ des adaptiven Regelsystems mit unterlagelter Kaskade bei einer sprungförmigen Störung des Ausgangs y_4

Im Vergleich zum vorherigen Versuch (Bild 5.5 und Bild 5.6) kann hier auf ein Korrektornetzwerk verzichtet werden. Das dynamische Verhalten der einzelnen Signale unterscheidet sich im Führungsverhalten wenig. Lediglich während der ersten 20 Minuten nach der Inbetriebnahme des adaptiven Regelsystems macht sich durch stärkere Oszillationen der Stellgrößen bemerkbar, daß kein Korrektornetzwerk verwendet wird. Das Störverhalten der Massetemperaturregelung kann durch den unterlagerten Regelkreis deutlich verbessert werden.

Das hier untersuchte Beispiel der dezentralen adaptiven Regelung eines Extruders zeigt, daß das in dieser Arbeit vorgestellte Entwurfsverfahren auch für Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen erfolgreich eingesetzt werden kann. Allerdings sind Grenzen der numerischen Berechnung der Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ und des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ erreicht, wenn bei einer hohen Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge die Eigenwerte alle in der Nähe des Punktes $(1,0)$ liegen. Dieser Fall tritt dann auf, wenn durch die dezentrale Regelung die Regelstrecke sehr gut entkoppelt werden kann.

5.2 Experimentelle Erprobung des adaptiven Regelsystems an einem Turbogenerator

5.2.1 Beschreibung der Regelstrecke

Das in den Kapiteln 1 bis 4 vorgestellte dezentrale adaptive Regelungskonzept wurde an einem Labormodell eines *Turbogenerators* erprobt. Bei dem Turbogenerator handelt es sich um ein Turbinen-Generator-System, das aus einer Luftdruckturbine und einem fremderregten Synchrongenerator im Inselbetrieb nach Bild 5.10 besteht.

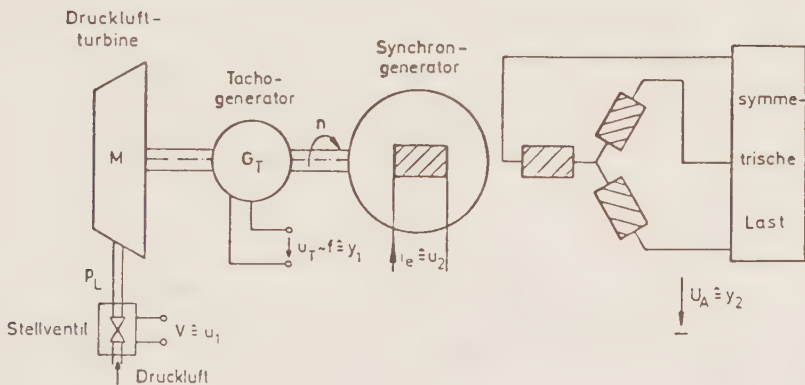


Bild 5.10 Schematische Darstellung des Turbogenerators

Der Drehstromgenerator ist ein 12-poliger 3-Phasen-Synchrongenerator, der ein nur aus ohmschen Widerständen bestehendes symmetrisches Drehstromnetz speist. Der Lastwiderstand kann zwischen den Punkten $R_L = 1.8 \, \Omega$ und $R_L = 2.8 \, \Omega$ pro Phase umgeschaltet werden.

Das Ziel einer Regelung des Turbogenerators ist es, die beiden Ausgangsgrößen, die Frequenz f der Generatorspannung und den Effektivwert der Phasenspannung des Generators U_A , bei Laständerungen auf einem vorgeschriebenen Wert zu halten. Die Frequenz f der Generatorspannung ist direkt proportional zur Drehzahl n

$$f = p \cdot n, \quad (5.7)$$

wobei p die Polpaarzahl des Synchrongenerators darstellt. Die Drehzahl kann dann über die Ausgangsspannung U_T eines Tachogenerators ermittelt werden. Anstelle einer aufwendigen Ermittlung des Effektivwertes der Generatorspannung wird über einen 3-Phasen-Brückengleichrichter der Gleichrichtwert, der dem Effektivwert proportional ist, gemessen. Die Wechselanteile der gemessenen Tachogeneratorspannung und der Ausgangsspannung des Brückengleichrichters werden durch Tiefpässe, deren Zeitkonstanten jedoch wesentlich kleiner als die Zeitkonstanten der Regelstrecke sind, begrenzt. Die Anpassungsschaltungen sind im Bild 5.11 dargestellt.

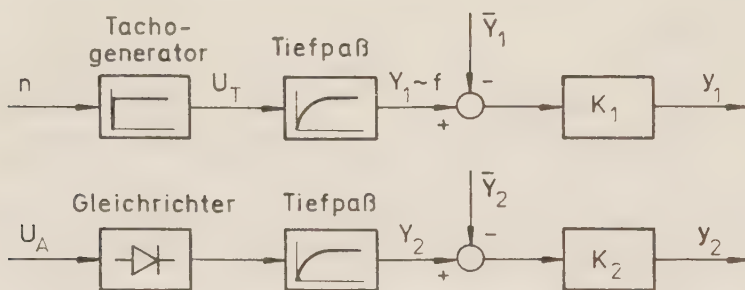


Bild 5.11 Blockdiagramm der Anpassungsschaltungen für die Frequenz f und die Spannung U_A

Konstante Werte $\bar{Y}_1$ und $\bar{Y}_2$ werden von den Meßgrößen Y_1 und Y_2 subtrahiert, so daß die dynamischen Ausgangssignale y_1 und y_2 die Abweichungen der Meßgrößen von einem statischen Ausgangszustand (Arbeitspunkt) beschreiben. Die Signale y_1 und y_2 werden von einem Prozeßrechner, auf dem der adaptive Regelalgorithmus realisiert ist, erfaßt. Mit dem Verstärkungen K_1 und K_2 wird die Anpassung an die A/D-Wandler des Prozeßrechners so eingestellt, daß eine Änderung der Frequenz f um 20 Hz (bzw. 200 U/min) eine Ausgangsspannungsänderung um 1 V ($\Delta y_1 = 0.1$) und eine Änderung des Effektivwertes der Spannung U_A um 1 V eine Ausgangsspannungsänderung um 0.5 V ($\Delta y_2 = 0.05$) bewirkt. Die Signale y_1 und y_2 werden deshalb im weiteren auch als normierte Regelgrößen bezeichnet.

Zur Regelung stehen als Stellgrößen der Erregerstrom i_e des Synchrongenerators und der Öffnungsgrad eines Stellventils v in der Druckluftzufuhrleitung der Turbine zur

Verfügung. Die Leistung der Turbine wird im wesentlichen durch den Luftdruck p_L bestimmt. Zwischen dem Luftdruck p_L und der Ventilöffnung v besteht ein nichtlinearer Zusammenhang, der näherungsweise durch die Beziehung

$$p_L \sim \arctan \{ \alpha v \} \quad (5.8)$$

beschrieben werden kann. Der Erregerstrom i_e wird von einer spannungsgesteuerten Stromquelle geliefert. Zur Vermeidung von Spannungsspitzen, die durch die Induktivität L_e der Erregerwicklung entstehen können, wird die Stellgröße U_2 durch einen Tiefpaß gefiltert. Bild 5.12 zeigt das Blockschaltbild der Stellglieder.

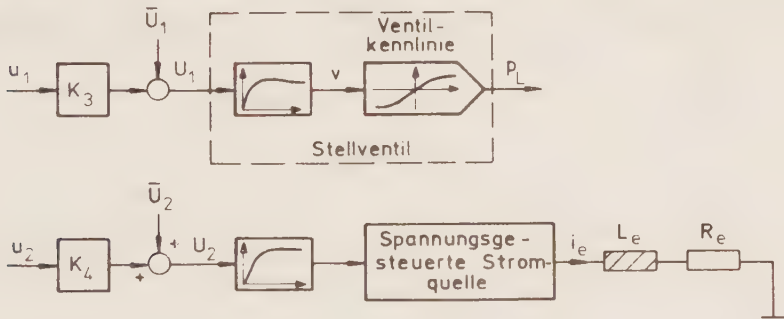


Bild 5.12 Blockschaltbild der Stellglieder

Zu den von dem Prozeßrechner über die D/A-Wandler ausgegebenen Stellgrößen u_1 und u_2 werden konstante Werte U_1 und U_2 , die den Arbeitspunkt des Turbogenerators festlegen, addiert. Die Stell- und Meßglieder werden dann so abgeglichen, daß sich für $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ auch $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ ergibt. Über die Konstanten K_3 und K_4 wird die Zuordnung zwischen den Ausgangssignalen der D/A-Wandler und den Stellgrößen so eingestellt, daß eine Änderung der Eingangsspannung u_1 um 1 V ($\Delta u_1 = 0.1$) einer Änderung der Ventilöffnung um 3 % und eine Änderung von u_2 um 1 V ($\Delta u_2 = 0.1$) einer Änderung des Erregerstroms i_e um 0.03 A entspricht. Der Zusammenhang zwischen den normierten Größen u_1 , u_2 , y_1 und y_2 und den physikalischen Größen v , i_e , f und U_A ist noch einmal in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

$\Delta u_1 = \pm 1$	$\Delta u_2 = \pm 1$	$\Delta y_1 = \pm 1$	$\Delta y_2 = \pm 1$
$\Delta v = \pm 30 \%$	$\Delta i_e = \pm 200 \text{ Hz}$	$\Delta f = \pm 200 \text{ Hz}$	$\Delta U_A = \pm 20 \text{ V}$

Tabelle 5.1 Normierung der Stell- und Regelgrößen

Der Turbogenerator stellt ein stark nichtlineares System dar. Das Stellventil hat eine nichtlineare Kennlinie und die stationäre Ausgangsspannung U_A ist proportional dem Produkt aus dem magnetischen Fluß Φ und der Drehzahl n bzw. der Frequenz f . Der magnetische Fluß Φ seinerseits stellt eine nichtlineare Funktion des Erregerstroms i_e und damit der Stellgröße u_2 dar. Im Bild 5.13 sind die nichtlinearen Kennlinien der

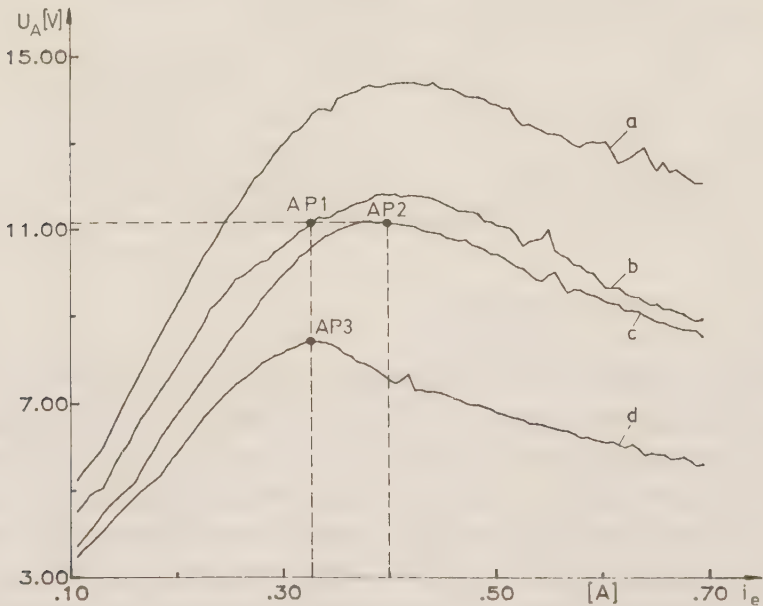


Bild 5.13 Stationäre Ausgangsspannung U_A als Funktion des Erregerstroms i_e für verschiedene Ventilöffnungen v und Lastwiderstände R_L

- a) $v = 60 \%$, $R_L = 2.8 \Omega$ b) $v = 50 \%$, $R_L = 2.8 \Omega$
c) $v = 60 \%$, $R_L = 1.8 \Omega$ d) $v = 50 \%$, $R_L = 1.8 \Omega$

Ausgangsspannung U_A in Abhängigkeit vom Erregerstrom i_e für verschiedene Ventilöffnungen und Lastzustände dargestellt. Für die Experimente wurde der Arbeitspunkt

$$U_A = 11.2 \text{ V} \quad , \quad f = 110 \text{ Hz} \quad (5.9)$$

ausgewählt. Der Arbeitspunkt AP1 ist dann durch die stationären Stellgrößen $i_e = 0.32 \text{ A}$ und $v = 50\%$ für einen Lastwiderstand $R_L = 2.8 \Omega$ bestimmt. Wird der Lastwiderstand auf den Wert $R_L = 1.8 \Omega$ umgeschaltet, so ergibt sich für den unregelmäßig betriebenen Turbogenerator der neue Arbeitspunkt AP3. Das dynamische Verhalten der Ausgangsgrößen y_1 und y_2 ist im Bild 5.14 dargestellt.

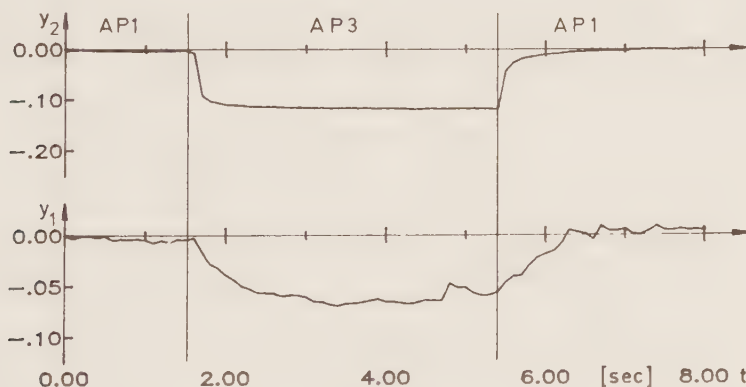


Bild 5.14 Gemessenes Störverhalten des Turbogenerators ohne Regelung, Laständerung

Die Regelaufgabe besteht darin, die Ausgangsgrößen bei Laständerungen konstant zu halten. Der Arbeitspunkt AP2 ist dann durch die stationären Stellgrößen $i_e = 0.4 \text{ A}$ und $v = 60\%$ definiert.

Werden nur kleine Abweichungen von den Arbeitspunkten zugelassen, so kann die nichtlineare Regelstrecke in den verschiedenen Arbeitspunkten durch lineare Modelle beschrieben werden. Mittels rekursiver Parameterschätzverfahren (Unbehauen, 1985b) können die Koeffizienten der einzelnen Übergangsfunktionen $G_{ij}(z)$ des Turbogenerators für die Arbeitspunkte AP1 und AP2 ermittelt werden. Tabelle 5.2 enthält die charakteristischen Daten der diskreten Übertragungsfunktionen für eine Abtastzeit

AP1	Übertragungsfunktion	Verstärkung
	$G_{11}(z) = \frac{0.16 z^{-1} + 0.043 z^{-2}}{1 - 0.845 z^{-1} + 0.04 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{11} = 1.04$
	$G_{12}(z) = \frac{0.035 z^{-1} - 0.0369 z^{-2}}{1 - 1.095 z^{-1} + 0.184 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{12} = -0.81$
	$G_{21}(z) = \frac{0.118 z^{-1} - 0.03 z^{-2}}{1 - 1.256 z^{-1} + 0.382 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{21} = 0.69$
	$G_{22}(z) = \frac{0.0237 z^{-1} + 0.162 z^{-2} - 0.185 z^{-3}}{1 - 1.32 z^{-1} + 0.49 z^{-2} - 0.087 z^{-3}} z^{-1}$	$K_{22} = 0.011$

Übertragungsnullstellen : -8.7, -0.31, 0.209, 0.006, $0.86 \pm j0.05$, $0.62 \pm j0.075$

Pole : 0.887, 0.85, 0.794, 0.737, 0.5183, 0.207, 0.05, $0.232 \pm j0.217$

AP2	Übertragungsfunktion	Verstärkung
	$G_{11}(z) = \frac{0.12 z^{-1} - 0.057 z^{-2}}{1 - 1.45 z^{-1} + 0.52 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{11} = 0.89$
	$G_{12}(z) = \frac{-0.054 z^{-1} - 0.0626 z^{-2}}{1 - 1.02 z^{-1} + 0.159 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{12} = -0.86$
	$G_{21}(z) = \frac{0.068 z^{-1} - 0.0043 z^{-2}}{1 - 1.022 z^{-1} + 0.189 z^{-2}} z^{-2}$	$K_{21} = 0.38$
	$G_{22}(z) = \frac{0.021 z^{-1} + 0.131 z^{-2} - 0.16 z^{-3}}{1 - 1.243 z^{-1} + 0.43 z^{-2} - 0.074 z^{-3}} z^{-1}$	$K_{22} = -0.06$

Übertragungsnullstellen : -8.51, 0.756, 0.113, -0.051, $0.85 \pm j0.0086$, $0.368 \pm j0.146$

Pole : 0.832, 0.824, 0.803, 0.78, 0.64, 0.242, 0.19, $0.209 \pm j0.214$

Tabelle 5.2 Diskrete Modelle des Turbogenerators für die Arbeitspunkte AP1 und AP2

$T = 0.1$ sec. Die Regelstrecke ist stabil, aber nichtminimalphasig, da eine der Übertragungsnullstellen in beiden Arbeitspunkten außerhalb des Einheitskreises liegt. Bild 5.15 zeigt die simulierten Sprungantworten.

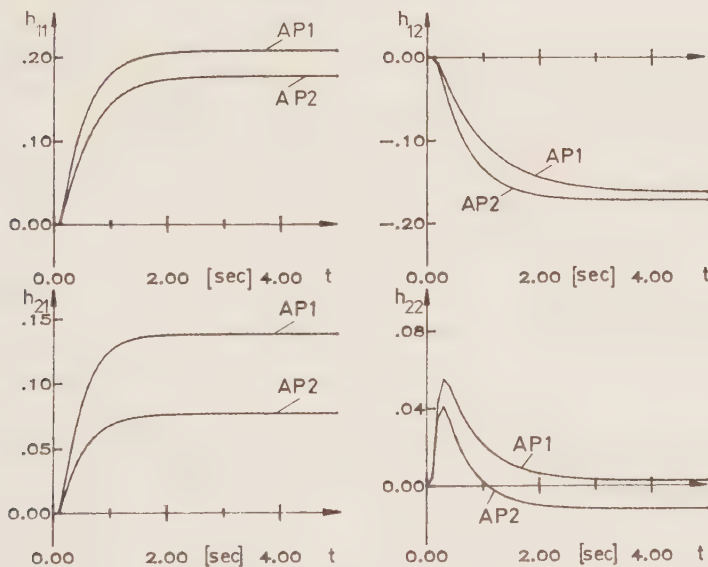


Bild 5.15 Simulierte Sprungantworten des Turbogenerators in den Arbeitspunkten AP1 und AP2

Eine Änderung der Last stellt nicht nur eine deterministische Störung der Ausgangssignale dar. Bild 5.15 macht deutlich, daß sich die Parameter des linearen Modells der Regelstrecke ebenfalls ändern.

5.2.2 Entwurf des Regelsystems und experimentelle Ergebnisse

Für den Entwurf des dezentralen adaptiven Regelsystems wird das lineare Modell des Turbogenerators im Arbeitspunkt AP1 nach Tabelle 5.2 verwendet. Eine der Übertragungsnullstellen liegt außerhalb des Einheitskreises, dann ist die Bedingung (2.37) nicht erfüllt und es muß ein Korrektornetzwerk für die Regelstrecke entworfen werden. Da

Gl.(2.12) erfüllt ist, entfällt die Berechnung eines Vorfilters $\underline{D}_v(z)$ und der Einfachheit halber wird das Parallelmodell $\underline{G}_m(z)$ als Einheitsmatrix angesetzt. Im Schritt 4 des Entwurfsverfahrens kann für die stabile Regelstrecke ein diagonales Korrektornetzwerk der Form

$$G_{K1}(z) = K_1 \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.845 z^{-1} + 0.04 z^{-2}} z^{-1}$$

$$G_{K2}(z) = K_2 \frac{1 - z^{-1}}{1 - 1.32 z^{-1} + 0.49 z^{-2} - 0.087 z^{-3}} z^{-1}$$
(5.10)

angesetzt werden. Die Vorzeichen der Verstärkungsfaktoren K_1 und K_2 werden aus den Verstärkungen der Regelstrecke nach Gl.(4.84) bestimmt. Für

$$K_1 = 0.3 \quad , \quad K_2 = 0.5$$
(5.11)

ergeben sich folgende Übertragungsnullstellen der erweiterten Regelstrecke nach Gl.(2.39) (Arbeitspunkt AP1)

$$z_{ni} : 0.836, 0.795, 0.46, 0.206, 0.05, 0.898 \pm j 0.07, 0.707 \pm j 0.061, 0.062 \pm j 0.282 .$$

Alle Nullstellen liegen innerhalb eines Kreises mit dem Radius $r = 0.91$ um den Ursprung der z -Ebene. Dann ist Gl.(4.82) für alle Kombinationen der Parameter r_1 und a

$$\sqrt{r_1} a > 0.91$$
(5.12a)

erfüllt, also z.B.

$$r_1 = 0.9 \quad , \quad a = 0.999 .$$
(5.12b)

Das Führungsverhalten des adaptiven Regelkreises kann durch entsprechende Wahl der Faktoren K_1 und K_2 noch beeinflusst werden. Aus einer Simulation des adaptiven Regelkreises werden im fünften Schritt des Entwurfsverfahrens die linearen Reglermatrizen $\underline{P}(z)$ und $\underline{S}(z)$ ermittelt. Dazu muß zunächst die Ordnung der Reglerpolynome $S^r(z)$ und $P^r(z)$ bestimmt werden. Im Bild 5.16 sind für verschiedene Reglerordnungen die Ortskurven der komplexen Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ der Übertragungsmatrix $H_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T})$

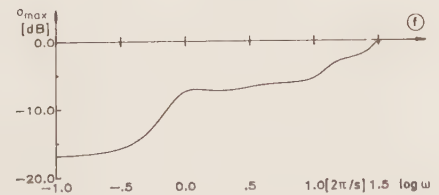
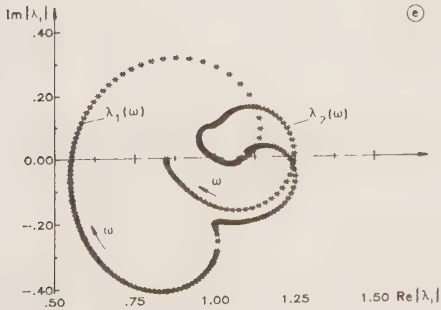
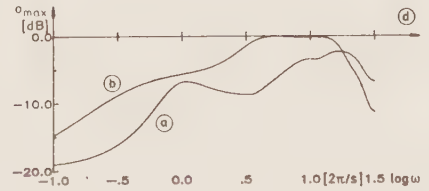
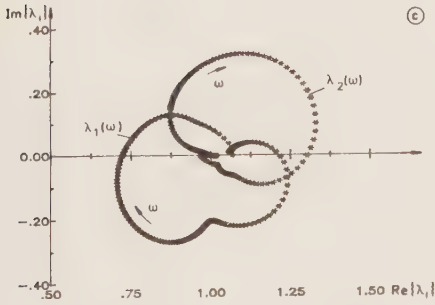
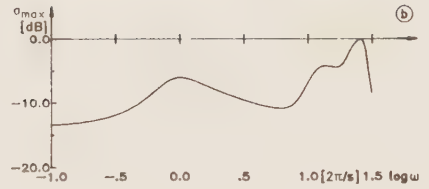
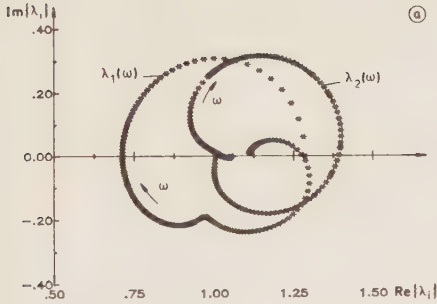


Bild 5.16 $\lambda_i(\omega)$ und $\sigma_{\max}(\omega)$ für verschiedene Regelordnungen und Adaptionparameter nach Tabelle 5.3

und der Verlauf des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}$ über der Frequenz, $0 \leq \omega \leq \pi/T$, dargestellt. Die Reglerordnungen und die Adaptionparameter zu Bild 5.16 sind in Tabelle 5.3 angegeben.

	Bild	n_{si}	n_{pi}	r_1	f_{2i}	$r_{2i} f_{1i}$	C'_i	R'_i
1	a,b	1	0	0.9	0.85	0.275	1.12	0.555
2	c,d	3	3	0.9	0.85	0.193	1.04	0.44
3	e,f	5	5	0.9	0.85	0.55	0.921	0.693

Tabelle 5.3 Parameter zu Bild 5.16

Die Reglerordnungen im Fall 1 (Bild a,b) entsprechen denjenigen eines diskreten PI-Reglers, wenn zusätzlich der Integrator im Stellgesetz nach Gl.(2.23) berücksichtigt wird. Wird wie im Fall 3 (Bild e,f) die Reglerordnung sehr groß angesetzt, so ist die Ermittlung günstiger Reglerkoeffizienten, die ein möglichst kleines Kreisgebiet für die Ortskurven der komplexen Eigenwerte der Matrix $\underline{H}_2(\sqrt{r_1} a e^{j\omega T})$ ergeben, schwierig (Wiemer und Unbehauen, 1987). Die Kreissektorparameter C'_i und R'_i unterscheiden sich im Fall 1 und 2 (Bild c,d) nur geringfügig. Deshalb wird die Ordnung der Reglerpolynome anhand der Simulation des adaptiven Regelkreises bestimmt. Für den Fall 2 ergibt sich eine schnelle Konvergenz der Reglerparameter und ein Führungsverhalten fast ohne Überschwingen nach Abschluß der Adaption (Bild 5.17).

Bild 5.18 und Bild 5.19 zeigen das dynamische Verhalten der gemessenen Ausgangssignale $y_1(k)$ und $y_2(k)$ des Turbogenerators sowie der Stellgrößen $u_1(k)$ und $u_2(k)$, der Adaptionfehlersignale $e_{m1}(k)$ und $e_{m2}(k)$, der Sollwerte $w_1(k)$ und $w_2(k)$ und die Verläufe einiger Reglerparameter $\hat{p}_1^1(k)$ und $\hat{p}_1^2(k)$ während der ersten 20 sec nach der Inbetriebnahme des dezentralen adaptiven Regelsystems (Inbetriebnahmeadaptation). Die Reglerkoeffizienten $\hat{p}_1^1(k)$ und $\hat{p}_1^2(k)$ werden dazu zum Zeitpunkt $k = 0$ auf den Wert 1, alle anderen Reglerkoeffizienten auf den Wert 0 gesetzt.

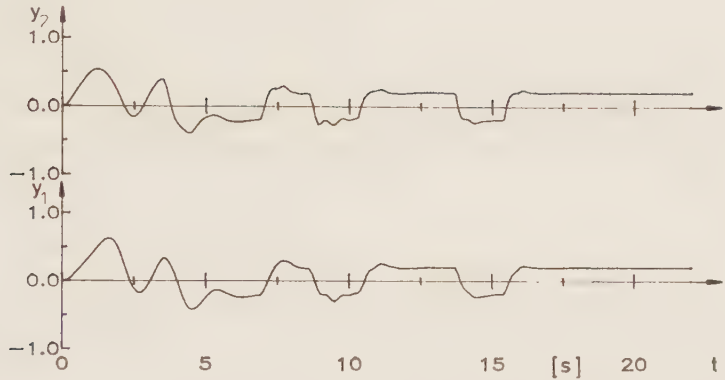


Bild 5.17 Verlauf der simulierten Ausgangssignale des Turbogenerators, Adaptionsparameter nach Tabelle 5.3, c)

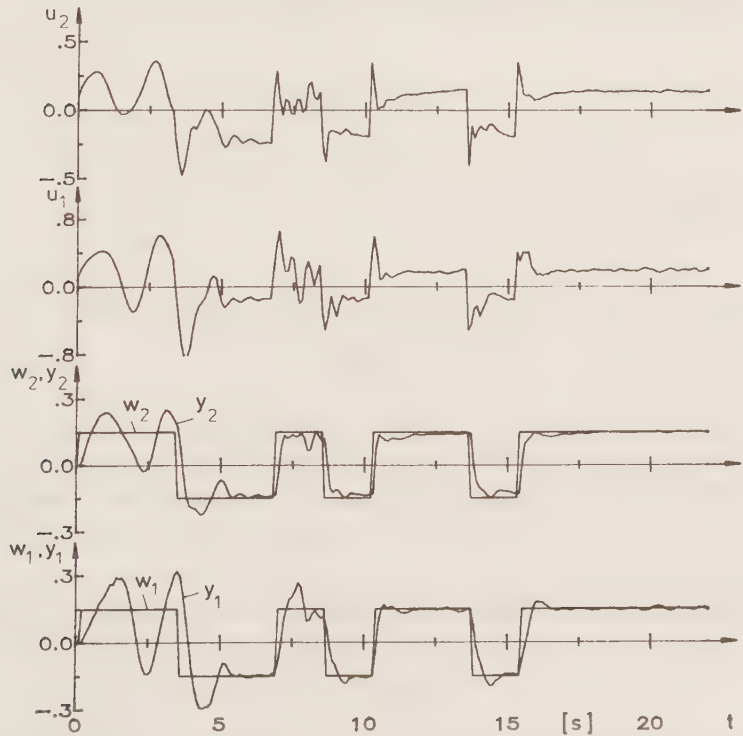


Bild 5.18 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ bei einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes im Arbeitspunkt API (Inbetriebnahmeadaptation)

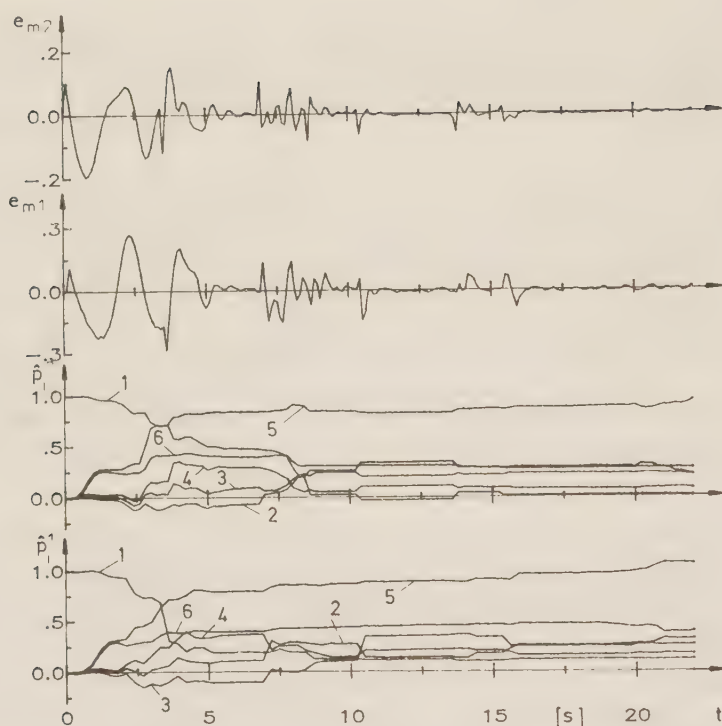


Bild 5.19 Verlauf des Adaptionsfehlersignals $e_m(k)$ und einiger Reglerkoeffizienten $\hat{p}_i^1(k)$ und $\hat{p}_i^2(k)$ (Inbetriebnahmeadaptation)

Bereits nach ca. 10 Sekunden ist die Phase der Anfangsadaptation nahezu abgeschlossen und die Ausgangssignale folgen den Sollwerten mit einer Anstiegszeit von ca. 0.5 Sekunden. Bedingt durch die dezentrale Reglerstruktur verschwindet der Adaptionsfehler $e_m(k)$ nicht vollständig. Das verbleibende Fehlersignal $e_m^*(k)$ nimmt jedoch sehr kleine Werte an, wenn der Sollwert konstant gehalten wird. Das Maximum tritt bei einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes auf. Der Wert beträgt in diesem Experiment

$$\max e_{mi}^*(k) < 0.1 \quad i = 1, 2 \quad (5.13)$$

Um starke Schwingungen der Stell- und Regelgrößen nach der Inbetriebnahme des adaptiven Regelsystems zu vermeiden, werden die Anfangswerte der Kovarianzmatrizen $\underline{E}_i(0)$ und der Signalwichtungsfaktoren $r_i(0)$ niedrig angesetzt

$$\underline{E}_i(0) = \underline{1}, \quad r_i(0) = 1. \quad (5.14)$$

Die Reglerparameter erreichen deshalb ihre stationären Endwerte erst nach ca. 10 - 15 Sekunden. Durch die Verwendung eines Adaptionsgesetzes mit übergreifender Parameteradaption

$$\hat{\underline{p}}^r(k) = \hat{\underline{p}}^r(k-d^r-1) + \Delta \hat{\underline{p}}^r(k) \quad (5.15)$$

werden in Abhängigkeit von den Totzeiten der Regelstrecke immer die jeweils $d^r + 1$ Abtastschritte zurückliegenden Reglerkoeffizienten aktualisiert. Dadurch ergeben sich im Prinzip $d^r + 1$ verschiedene Reglerparametervektoren für jeden Regler r . Im Bild 5.20 sind die Verläufe des ersten Koeffizienten der Reglerparametervektoren $\hat{\underline{p}}^1(k)$ und $\hat{\underline{p}}^2(k)$ aufgezeichnet. Dargestellt ist jeweils nur jeder zweite bzw. dritte Abtastschritt.

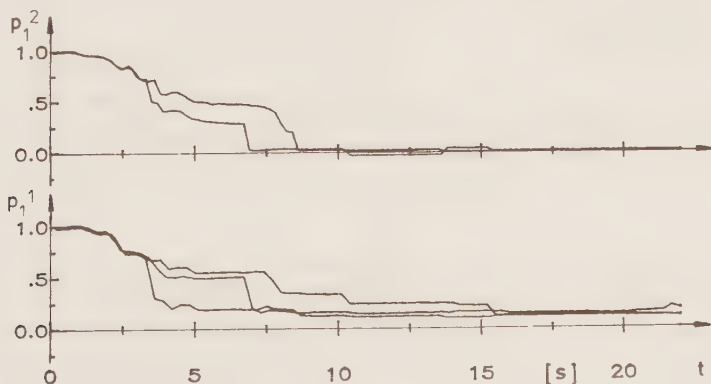


Bild 5.20 Der Verlauf der Reglerparameter $\hat{p}_1^1(3k-i)$, $i = 0, 1, 2$ und $\hat{p}_1^2(2k-i)$, $i = 0, 1$, für das Experiment nach Bild 5.18 bzw. Bild 5.19

Alle $d^r + 1$ verschiedenen Reglerparametersätze konvergieren gegen den gleichen Endwert. Nach dem Abschluß der Inbetriebnahmeadaptation kann dann jeder Regler durch einen Satz Reglerparameter beschrieben werden.

Da die Regelstrecke im Arbeitspunkt AP2 durch ein anderes Modell beschrieben wird, ist es sinnvoll, zu überprüfen, ob die im vorherigen Experiment verwendeten Adapti-

onsparameter auch im Arbeitspunkt AP2 die Stabilitätsbedingungen nach Theorem 4.1 erfüllen. Eine Analyse des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ über der Frequenz ergibt, daß dazu der Radius $\underline{R}'_i$ in Gl. (4.19) von $\underline{R}'_i = 0.44 \text{ I}$ auf $\underline{R}'_i = 0.59 \text{ I}$ erhöht werden muß. Der zugehörige Verlauf ist im Bild 5.16d dargestellt (Kurve b). Das dezentrale adaptive Regelsystem ist in beiden Arbeitspunkten stabil, wenn die Adaptionsparameter

$$f_{1i} = 0.9, \quad f_{2i} = 0.75, \quad r_{2i} = 0.36, \quad i = 1, \dots, q \quad (5.16)$$

verwendet werden.

Das Störverhalten des dezentralen adaptiven Regelsystems für eine Änderung des Lastwiderstandes R_L von $R_L = 2.8 \text{ } \Omega$ (a) auf $R_L = 1.8 \text{ } \Omega$ (b) und umgekehrt ist im Bild 5.21 dargestellt. Nach dem Auftreten der ersten Störung paßt sich der adaptive Regler an die geänderte Dynamik der Regelstrecke im Arbeitspunkt AP2 (vgl. Bild 5.15) an. Dies ist anhand der Oszillationen der Stell- und Regelgrößen im Bild 5.21 zu erkennen. Nach mehrmaliger Laständerung stellt sich dann ein robuster Regler ein, d.h. die Amplituden der aufgrund der Adaption auftretenden Oszillationen sind wesentlich kleiner und die maximale Abweichung der Ausgangsgrößen von dem Sollwert ist etwas geringer.

Die Anpassungsfähigkeit des adaptiven Reglers an die geänderte Streckendynamik im zweiten Arbeitspunkt wird auch durch Bild 5.22 dokumentiert. Es zeigt das Verhalten der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ während der Inbetriebnahmeadaptation im Arbeitspunkt AP2. Nach ca. 10 Sekunden ergibt sich ein Führungsverhalten, das im Vergleich zu Bild 5.18 eine etwas größere Anstiegszeit der Ausgangssignale bei Sollwertänderungen aufweist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das Korrekturnetzwerk nach Gl.(5.15) auf das dynamische Verhalten der Regelstrecke im Arbeitspunkt AP1 optimiert wurde. Durch das Korrekturnetzwerk ist das Führungsverhalten immer auch von der Dynamik der Regelstrecke abhängig (Hahn, 1983). Ein Vergleich der Bilder 5.18 und 5.22 macht jedoch deutlich, daß diese Abhängigkeit so gering ist, daß eine Nachoptimierung des Korrekturnetzwerks nicht nötig ist.



Bild 5.21 Verlauf der Signale $u_1(k)$, $u_2(k)$, $y_1(k)$ und $y_2(k)$ für eine Änderung des Lastwiderstandes R_L a) $R_L = 2.8 \, \Omega$ b) $R_L = 1.8 \, \Omega$

Um die Leistungsfähigkeit des dezentralen adaptiven Regelsystems beurteilen zu können, wird in einem abschließenden Experiment ein adaptiver Mehrgrößenregler an dem Turbogenerator eingesetzt. Dazu muß im Stellgesetz nach Gl.(4.14) anstelle einer diagonalen Reglermatrix $\underline{P}(z)$ eine vollständig besetzte Matrix verwendet werden. In diesem Versuch erhöht sich dadurch Anzahl der adaptiven Reglerparameter von 16 auf 24. Im Gegensatz zu vorhergehenden Veröffentlichungen (Hahn, (1983), Hahn, Röck, Schmid und Wiemer, (1985)) wird zur Adaption der Reglerparameter der in dieser Arbeit vorgestellte WRLS-Algorithmus mit rekursiver Wichtung der Signale und übergreifender Parameterschätzung verwendet. Damit ein direkter Vergleich mit der dezentralen Reg-

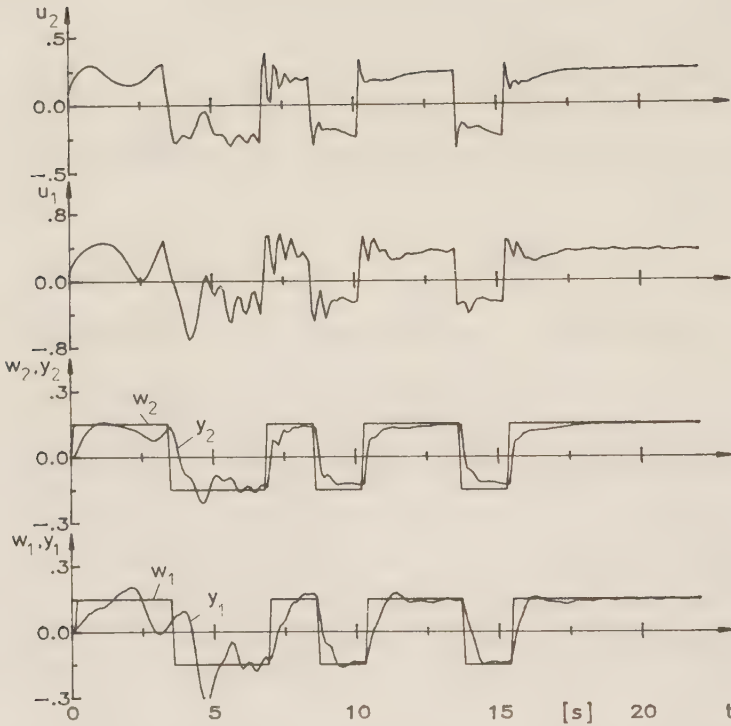


Bild 5.22 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ bei sprungförmiger Änderung des Sollwertes im Arbeitspunkt AP2 (Inbetriebnahmeadaptation)

lerstruktur möglich ist, werden die gleichen Adaptionparameter, das gleiche Korrektornetzwerk und die gleichen Anfangsparameter für die Adaption verwendet. Der im **Bild 5.23** dargestellte Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ macht deutlich, daß durch die erhöhte Anzahl der Adaptionparameter die Konvergenzgeschwindigkeit etwas verringert wird. Während die Ausgangsgröße $\underline{y}_1(k)$ im Bild 5.18 bereits nach ca. 10 Sekunden das gewünschte dynamische Verhalten aufweist, zeigt das Bild 5.23 nach 10 Sekunden noch ein deutliches Überschwingen des Signals $\underline{y}_1(k)$ nach einer Sollwertänderung. Im angepaßten Zustand, d. h. nach dem Abschluß der Adaptionphase, unterscheidet sich das Führungsverhalten in beiden Versuchen jedoch nur noch geringfügig. **Bild 5.24** zeigt das Störverhalten des Turbogenerators bei Laständerungen. Die

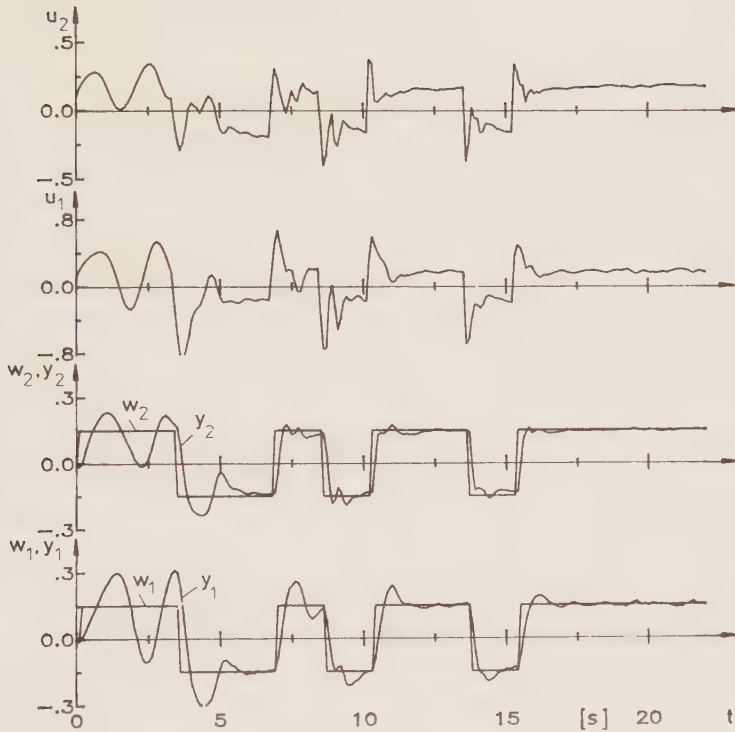


Bild 5.23 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$, $\underline{y}(k)$ und $\underline{w}(k)$ bei sprungförmiger Änderung des Sollwertes im Arbeitspunkt API (adaptiver Mehrgrößenregler)

Abweichung der Regelgrößen vom Sollwert ist bei dem Einsatz eines adaptiven Mehrgrößenreglers im Vergleich zum dezentralen adaptiven Regler etwas kleiner.

Diesen geringfügigen Verbesserungen steht jedoch der erhöhte Aufwand eines vollständigen Mehrgrößenreglers gegenüber. Zur Frequenz-Spannungsregelung des Turbogenerators ist eine dezentrale Reglerstruktur völlig ausreichend. Probleme mit der Stabilität des dezentralen adaptiven Regelsystems traten nur dann auf, wenn die Einstellung Adaptionsparameter nicht nach dem in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Entwurfsverfahren durchgeführt, sondern der Einfluß der Adaption darüber hinaus sehr stark erhöht wurde.

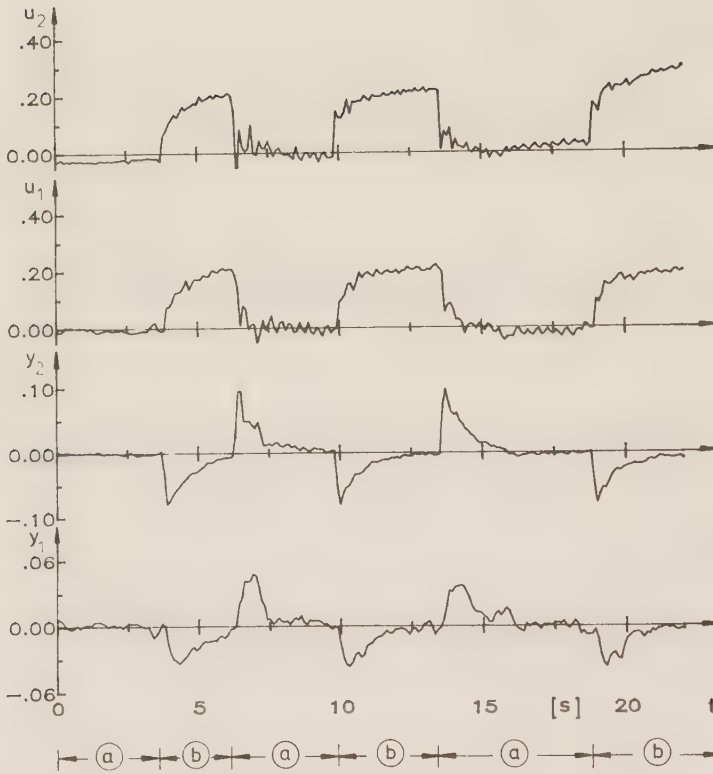


Bild 5.24 Verlauf der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{y}(k)$ bei einer Änderung des Lastwiderstandes R_L (adaptiver Mehrgrößenregler), a) $R_L = 2.8 \, \Omega$, b) $R_L = 1.8 \, \Omega$

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein Analyse- und Syntheseverfahren für dezentrale adaptive Regelsysteme vorgestellt. Dem jeweiligen Grundregelkreis wird ein dezentrales, nichtlineares Anpassungssystem überlagert, in welchem aus dem Differenzsignal zwischen dem jeweils zugehörigen tatsächlichen Ausgangssignal der Regelstrecke und einem vorgegebenen idealen Modellverhalten ein Maß zur Nachstellung der Reglerparameter gebildet wird. Zur Stabilitätsanalyse des gesamten Regelsystems wird das dynamische Verhalten dieser zu einem Vektor zusammengefaßten Differenz- oder Fehlersignale betrachtet. Es wird gezeigt, daß das zugehörige vektorielle Fehlersystem in einer rückgekoppelten Standardstruktur dargestellt werden kann (Kapitel 2). Während das Übertragungssystem im Vorwärtszweig dieser Struktur das gewählte Adaptionsgesetze zur Nachstellung der Reglerparameter beschreibt, hängt das System im Rückwärtszweig von den Kopplungen der Teilregelstrecken und der gewählten Struktur der unterlagerten Grundregelkreise des Regelsystems ab. Die Stabilität des Fehlersystems wird mit Hilfe der Sektor-Stabilitätstheorie untersucht. Dazu wird in der Arbeit ein Stabilitätstheorem für die dezentrale adaptive Regelung angegeben, das für beliebige Regelstrecken den Entwurf eines garantiert stabilen, dezentralen adaptiven Regelsystems ermöglicht. Ist die Regelstrecke nichtminimalphasig, d. h. liegen Übertragungsnullstellen außerhalb des Einheitskreises, so muß zusätzlich eine lineare Rückführung der Stellgrößen, das Korrekturnetzwerk, eingeführt werden.

Die Einstellparameter des Adaptionsgesetzes werden so gewählt, daß die Übertragungssysteme im Vorwärts- bzw. Rückwärtszweig des Fehlersystems bestimmte Sektoreigenschaften besitzen. In der Arbeit wird gezeigt, daß dazu spezielle Adaptionsgesetze verwendet werden müssen. Es werden drei Algorithmen der WFG, STA und WRLS-Algorithmus (Kapitel 3) vorgestellt, die sich von bekannten Adaptionsgesetzen durch verschiedene Modifikationen unterscheiden. Der Hauptunterschied besteht in der Struktur der Adaptionsgesetze. Aktualisiert wird im Gegensatz zu bekannten Algorithmen nicht der im vorherigen Abtastschritt ermittelte, sondern ein mehrere Abtastschritte vorher berechneter Reglerparametervektor (übergreifende Parameteranpassung). Von entscheidender Bedeutung für die Ableitung der Sektoreigenschaften ist die Einführung eines zeitvarianten Signalgewichtsfaktors. Dadurch sind die Sektoreigenschaften

nur von den Adaptionparametern abhängig. Die Konvergenzeigenschaften der drei Adaptionsalgorithmen werden für verschiedene Adaptionparameter dargestellt und miteinander verglichen.

Während der erste Teil der Arbeit sich vorwiegend mit den theoretischen Grundlagen des Verfahrens beschäftigt, enthält der zweite Teil Hinweise zur praktischen Anwendung des Entwurfsverfahrens (Kapitel 4). Das gesamte Verfahren besteht aus 12 Einzelschritten, die teilweise hintereinander, teilweise nebeneinander bearbeitet werden müssen. Zunächst werden die Sektoreigenschaften des Systems im Rückwärtszweig des Fehlermodells bestimmt. Dies geschieht im Frequenzbereich durch die Auswertung der Ortskurven der komplexen Eigenwerte und des Verlaufs des maximalen singulären Wertes einer komplexen Matrix. Die Parameter des Adaptiongesetzes werden dann so bestimmt, daß das System im Vorwärtszweig die entsprechenden Sektoreigenschaften besitzt. Dann läßt sich zeigen, daß das dezentrale adaptive Regelsystem in Abhängigkeit von der Erregung des Systems entweder global asymptotisch L_∞ -stabil oder asymptotisch L_∞ -stabil im Kleinen ist. Das Entwurfsverfahren wird anhand einer Regelstrecke mit zwei Ein- und Ausgängen ausführlich dargestellt. Dabei werden verschiedene Vorgehensweisen bei der Synthese des dezentralen adaptiven Regelsystems diskutiert.

Im dritten Teil der Arbeit wird die Leistungsfähigkeit des dezentralen adaptiven Regelsystems anhand von zwei Beispielen demonstriert (Kapitel 5). Zunächst wird ein adaptives Regelsystem für das Modell eines Extruders, der in der chemischen Industrie zur Kunststoffverarbeitung verwendet wird, entworfen. Das Beispiel mit 5 Stell- und Regelgrößen zeigt, daß das in dieser Arbeit vorgestellte Entwurfsverfahren auch für Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen erfolgreich eingesetzt werden kann. Die Grenzen des Verfahrens sind durch die numerische Berechnung der Eigenwerte $\lambda_i(\omega)$ und des maximalen singulären Wertes $\sigma_{\max}(\omega)$ der komplexen Matrix, die das System im Rückwärtszweig des Fehlermodells beschreibt, gegeben. Diese Einschränkung charakterisiert jedoch nicht das vorgestellte Syntheseverfahren sondern lediglich die als Hilfsmittel verwendete Soft- bzw. Hardware.

Abschließend werden die Ergebnisse der experimentellen Erprobung des dezentralen adaptiven Regelsystems an dem Labormodell eines Turbogenerators vorgestellt. Der

Regler paßt sich selbständig an Änderungen des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke in den verschiedenen Arbeitspunkten und bei verschiedenen Lastzuständen an. Werden die Adaptionsparameter nach dem vorgestellten Entwurfsverfahren ermittelt, so bleibt das gesamte dezentrale adaptive Regelsystem unter allen betrachteten Betriebsbedingungen stabil. Im Vergleich mit einem vollständigen adaptiven Mehrgrößenregler ergeben sich nur geringfügige Unterschiede in der Regelgüte und im Adaptionsverhalten.

Ein wichtiges Kriterium für den Einsatz moderner Regelungsverfahren in der Industrie ist die Wirtschaftlichkeit des neuen Verfahrens im Vergleich zu den Standardlösungen, die in vielen Fällen aus dem Einsatz einfacher PI- oder PID-Regler bestehen. Adaptive Regelsysteme werden in die Industrie vor allem dann eingesetzt, wenn durch eine verkürzte Inbetriebnahmezeit, die sich aus der Fähigkeit des adaptiven Reglers zur Selbsteinstellung der Reglerparameter ergibt, oder durch eine wirtschaftlichere Fahrweise der Prozesse, die durch die mit adaptiven Regelsystemen erreichbare konstante Regelgüte unter verschiedenen Betriebszuständen möglich ist, Kosten z.B. für Personal und Energie eingespart werden können. Auf den ersten Blick weist das in dieser Arbeit vorgestellte Entwurfsverfahren den Nachteil auf, daß durch die Komplexität des gesamten Verfahrens eine kurze Inbetriebnahmezeit nicht zu erwarten ist, vor allem, da zur Synthese des adaptiven Regelsystems ein Modell der Regelstrecke vorhanden sein muß. Die Vielzahl der Veröffentlichung über den Einsatz adaptiver Regelsystem an praktischen Anlagen in den letzten Jahren hat jedoch gezeigt, daß die für die theoretische Betrachtung sinnvolle Annahme einer vollständigen Parameterunsicherheit der Regelstrecke in der Praxis unangebracht ist. Vorhandene a-priori Kenntnisse, auch über die Parameter der Regelstrecke, sollten in den Entwurf des adaptiven Regelsystems eingebracht werden können. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren bietet dazu die Möglichkeit. Es erlaubt den Entwurf eines adaptiven Regelsystems mit einer bestimmten Stabilitätsreserve, die durch die Sektoreigenschaften der Übertragungssysteme des Fehlermodells festgelegt wird. Damit unterscheidet sich die Synthese des adaptiven Regelsystems kaum von dem Vorgehen beim Entwurf konventioneller Regler, nur daß das adaptive System sich innerhalb des festgelegten Stabilitätsbereichs an Änderungen der Streckenparameter anpassen kann.

In der letzten Zeit wurden von verschiedenen Herstellern kommerzielle adaptive Regelgeräte, die auf einfache Weise die automatische Ermittlung der Reglereinstellwerte ermöglichen, ohne daß eine zeitaufwendige Inbetriebnahme durchgeführt werden muß, auf dem Markt angeboten. Bis auf wenige Ausnahmen ist mit diesen Geräten lediglich die automatische Ermittlung von PID-Einstellwerten möglich. In den meisten technischen Großanlagen der Industrie sind die zu regelnden Ausgangsgrößen mehr oder weniger stark miteinander verkoppelt. Werden die konventionellen PID-Regler dann durch adaptive Regelgeräte ersetzt, so entsteht eine typische, dezentrale adaptive Regelungsstruktur. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren bietet dann die Möglichkeit, die Grenzen der Einsatzfähigkeit dezentraler adaptiver Regelsysteme zu ermitteln. Auch wenn die Stabilitätsaussagen nur für die Verwendung der in dieser Arbeit vorgestellten, modifizierten Adaptionalgorithmen gelten, so kann das Verfahren doch Hinweise für den dezentralen Einsatz kommerzieller Regelgeräte geben. Einige dieser Regelgeräte besitzen eine Grundstruktur des unterlagerten Regelkreises, die der in dieser Arbeit verwendeten Struktur (s. Bild 2.1) sehr ähnlich ist. Läßt sich dann eine Beziehung für die Matrix $H_2(z)$ im Rückwärtszweig des Fehlermodells ableiten, so kann anhand der komplexen Eigenwerte eine allgemeine Aussage darüber gemacht werden, ob die Regelstrecke für den Einsatz dezentraler adaptiver Regelsysteme geeignet ist. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn alle komplexen Eigenwerte sehr nahe bei den Punkt (1,0) liegen. Eine konkrete Stabilitätsaussage ist jedoch nur dann möglich, wenn zur Parameter-nachstellung eines der in dieser Arbeit vorgestellten Adaptionsgesetze verwendet wird.

Die mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Entwurfsverfahrens ermittelten Adaptionsparameter legen den Einfluß der Adaption und damit die Adaptionsgeschwindigkeit fest. Es existiert allerdings kein direkter Zusammenhang zwischen nur einen Adaptionsparameter und der Adaptionsgeschwindigkeit. Sie wird vielmehr von dem Zusammenwirken nahezu aller Adaptionsparameter festgelegt. Bei stark verkoppelten Regelstrecken ergibt sich, wenn überhaupt, nur dann ein stabiles, dezentrales adaptives Regelsystem, wenn die Adaption nur schwach eingestellt ist. Diese Aussage läßt sich für alle Adaptionsgesetze und alle adaptiven Regelsysteme verallgemeinern. Gelingt es, den Einfluß der Adaption, kurz *adaptive Verstärkung* genannt, auf einfache Weise einstellbar zu machen, z.B. durch Veränderung nur eines Parameters zwischen zwei Grenzwerten, dann hat auch Betriebspersonal, das im Umgang mit adaptiven Regelgeräten

wenig Erfahrung besitzt, die Möglichkeit, die Adaptionenfähigkeit des Reglers den jeweiligen Erfordernissen anzupassen. Dieser Punkt wird zur Zeit von den Herstellern noch viel zu wenig beachtet.

Anhang A

A1. Grundlegende Begriffe aus der Funktionalanalysis

A1.1 Die Definition von Funktionenräumen	149
A1.2 Spezielle Funktionenräume	152

A2. Beschreibung von Übertragungssystemen durch Operatoren 157

A3. Sektoreigenschaften von Operatoren

A3.1 Die Definition von Sektoren	160
A3.2 Eigenschaften von konischen Operatoren.	167

A4. Funktionalanalytische Methoden zur Stabilitätsanalyse von Regelkreisen

A4.1 Stabilitätsdefinitionen.	173
A4.2 Das allgemeine Sektor-Stabilitätstheorem.	177

A5. Stabilitätstheoreme für den nichtlinearen Standardregelkreis. 183

A1. Grundlegende Begriffe aus der Funktionalanalysis

A1.1 Die Definition von Funktionenräumen

Betrachtet man nur das Eingangs- bzw. Ausgangsverhalten eines Systems und läßt eine detaillierte Beschreibung der internen Struktur außer acht, so kann das System durch eine Abbildung H beschrieben werden, die jeder Eingangsgröße u die Ausgangsgröße y

$$y = H u \quad (\text{A.1})$$

zuordnet. u und y stellen Zeitfunktionen dar, die durch H vollständig ineinander abgebildet werden. Die Menge aller Eingangsfunktionen u wird Definitionsbereich U und die Menge aller Ausgangsfunktionen y Abbildungsbereich Y genannt

$$u \in U, y \in Y. \quad (\text{A.2})$$

Definitions- und Bildbereich sind Mengen von Funktionen, sogenannte Funktionenräume, die ganz bestimmte Eigenschaften besitzen können. Einige der grundlegenden Eigenschaften sollen im folgenden definiert werden. Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen ist z.B. bei Achieser und Glasmann(1968), eine kurze Zusammenfassung bei Desoer und Vidyasagar (1975) oder Böcker, Hartmann und Zwanzig (1986) zu finden. Die folgenden Definitionen und Aussagen wurden teilweise der erwähnten Literatur entnommen und werden im weiteren nicht mehr einzeln zitiert.

Definition 1 (linearer Raum):

Eine Menge R von Funktionen $f, g, h \dots$ bilden einen Raum, wenn sie gemeinsame Eigenschaften besitzen; sie bilden speziell einen linearen Raum, wenn in R

a) eine Addition (+) mit folgenden Eigenschaften definiert ist

$$f + g = g + f \quad (\text{Kommutativgesetz}) \quad (\text{A.3})$$

$$(f + g) + h = f + (g + h), \quad (\text{Assoziativgesetz}) \quad (\text{A.4})$$

b) ein Nullelement 0 existiert, so daß gilt

$$f + 0 = f, \quad (\text{A.5})$$

c) eine Multiplikation mit Zahlen a, b (Skalarmultiplikation) mit folgenden Eigenschaften definiert ist

$$a(f + g) = af + ag \quad (\text{Distributivgesetz}) \quad (\text{A.6})$$

$$(a + b)f = af + bf \quad (\text{A.7})$$

$$a(bf) = (ab)f \quad (\text{Assoziativgesetz}) \quad (\text{A.8})$$

d) ein Element 1 existiert, so daß gilt

$$1 \cdot f = f. \quad (\text{A.9})$$

Definition 2 (metrischer Raum):

Eine Menge R heißt metrischer Raum, wenn für je zwei Elemente von f, g, h ein reellwertiger Abstand $D(f, g)$ definiert ist, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$a) \quad D(f, g) = D(g, f) > 0, \quad g \neq f \quad (\text{A.10})$$

$$b) \quad D(f, f) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$c) \quad D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g) \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \quad (\text{A.12})$$

Definition 3 (vollständiger Raum):

Ein metrischer Raum R heißt vollständig, wenn in ihm jede Fundamentalfolge, d.h. jede Punktfolge $f_n \in R$ ($n = 1, 2, \dots$), die gegen einen Grenzwert f_0 konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n, f_0) = 0, \quad (\text{A.13a})$$

gegen ein Element des Raumes konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0 \in R. \quad (\text{A.13b})$$

Definition 4 (normierter Raum):

Ein linearer Raum R heißt normiert, wenn eine reellwertige Norm $\| \cdot \|$ definiert ist, die für jedes $f \in R$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\text{a) } \|f\| \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{b) } \|f\| = 0 \quad \text{für } f = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{c) } \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (\text{A.16})$$

$$\text{d) } \|af\| = |a| \cdot \|f\| \quad (\text{A.17})$$

Ein normierter Raum ist offensichtlich mit

$$D(f,g) = \|f - g\| \quad (\text{A.18})$$

auch ein metrischer Raum.

Definition 5 (Banach-Raum):

Als Banach-Raum bezeichnet man alle vollständigen metrischen Räume, die lineare Räume sind und bei denen der Abstand zwischen zwei Elementen durch die Norm der Differenz dieser Elemente definiert ist

$$D(f,g) = \|f - g\|.$$

Der Hilbert-Raum ist ein Spezialfall des Banach-Raumes. In ihm ist außer dem Abstand zwischen zwei Elementen noch das Skalarprodukt definiert.

Definition 6 (Skalarprodukt):

Eine reellwertige Zahl $\langle f,g \rangle$, die für jedes Elementepaar $f,g \in R$ eines linearen Raumes R folgende Bedingungen erfüllt

$$\text{a) } \langle g,f \rangle = \langle f,g \rangle^* \quad (\text{A.19})$$

(das Symbol $*$ an der Größe bedeutet den Übergang zum konjugiert komplexen Wert)

$$\text{b) } \langle af+bh,g \rangle = a\langle f,g \rangle + b\langle h,g \rangle \quad (\text{A.20})$$

$$\text{c) } \langle f,f \rangle \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\text{d) } \langle f,f \rangle = 0 \quad \text{für } f=0 \quad (\text{A.22})$$

heißt Skalarprodukt. Offensichtlich ist die positive Wurzel aus $\langle f,f \rangle$ eine Norm des Elements f .

Definition 7 (Hilbert-Raum):

Ein linearer normierter Raum R , der durch die vom Skalarprodukt erzeugte Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heißt Hilbert-Raum.

In einem Hilbert-Raum gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (\text{A.23})$$

A1.2 Spezielle Funktionenräume

Das Standardbeispiel für einen Hilbert-Raum ist der Raum R^n . Die Elemente $g, f \in R$ werden als Vektoren bezeichnet.

$$\underline{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T, \quad g_i \in R^n \quad (\text{A.24a})$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad f_i \in R^n \quad (\text{A.24b})$$

Als Norm im Raum R^n können folgende Beziehungen angegeben werden:

$$\|\underline{g}\|_1 = \sum_{i=1}^n |g_i| \quad (\text{A.25a})$$

$$\|\underline{g}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |g_i|^p \right\}^{1/p}, \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.25b})$$

$$\|\underline{g}\|_2 = (\underline{g}^T \underline{g})^{1/2} \quad (\text{A.25c})$$

$$\|\underline{g}\|_\infty = \max_i |g_i|. \quad (\text{A.25d})$$

Die Norm $\|\underline{g}\|_2$ heißt auch *Euklidische Norm*. Damit ergibt sich als Definition für das Skalarprodukt

$$\langle \underline{g}, \underline{f} \rangle_2 = \sum_{i=1}^n g_i f_i = \underline{g}^T \underline{f}. \quad (\text{A.26})$$

Eine äußerst wichtige Klasse von Hilbert-Räumen sind die sogenannten L_p^n -Räume. Die Elemente dieser Räume sind meßbare Vektorfunktionen $g(t)$,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T, \quad t \in \mathbb{R}, \quad g(t) \in L_p^n \quad (\text{A.27})$$

deren p -te Potenz ihres Betrages im Sinne von Lebesgue integrierbar ist. L_p^n ist die Menge der Funktionen, die jeder reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$ eine Vektorfunktion $g(t) \in L_p^n$ zuordnet. Da jede Folge $g(k)$ auch als Funktion, die nur an diskreten Stellen definiert ist, aufgefaßt werden kann, bilden auch die Vektorfunktionen $g(k)$,

$$g(k) = (g_1(k), g_2(k), \dots, g_n(k))^T, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad g(k) \in L_p^n \quad (\text{A.28})$$

welche in der p -ten Potenz absolut summierbar sind, einen Raum L_p^n . L_p^n ist die Menge der Funktionen, die jeder rationalen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ einen Wert $g(k) \in L_p^n$ zuordnet. Die Norm eines Elementes $g(t)$ oder $g(k)$ ist dann definiert durch

$$\|g(t)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|g(t)\|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.29a})$$

$$\|g(t)\|_\infty = \max_t \{ \|g(t)\| \} \quad (\text{A.29b})$$

oder

$$\|g(k)\|_p = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|g(k)\|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.30a})$$

$$\|g(k)\|_\infty = \max_k \{ \|g(k)\| \}. \quad (\text{A.30b})$$

$\|g(t)\|$ und $\|g(k)\|$ bezeichnen dabei beliebige Vektornormen im Raum $\mathbb{R}^n$. Einen wichtige Spezialfall stellt der Raum L_2^n dar. Unter Berücksichtigung der Euklidischen Norm in Gl.(A.29) und Gl.(A.30) ergibt sich für $p = 2$

$$\|g(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^T g(t) dt \right)^{1/2} \quad (\text{A.31a})$$

$$\|g(k)\|_2 = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} g(k)^T g(k) \right)^{1/2}. \quad (\text{A.31b})$$

Speziell für $p = \infty$ gilt

$$\|g(t)\|_{\infty} = \max_i \max_t \{ |g_i(t)| \} \quad (\text{A.32a})$$

$$\|g(k)\|_{\infty} = \max_i \max_k \{ |g_i(k)| \} \quad (\text{A.32b})$$

oder mit Gl.(A.25c)

$$\|g(t)\|_{\infty} = \max_t \{ g(t)^T g(t) \}^{1/2} \quad (\text{A.33a})$$

$$\|g(k)\|_{\infty} = \max_k \{ g(k)^T g(k) \}^{1/2} . \quad (\text{A.33b})$$

Die Vektorfunktionen $g(t) \in L_p^n$ bzw. $g(k) \in L_p^n$ müssen laut Voraussetzung meßbare Funktionen sein. Damit können sie zur Beschreibung von beschränkten Signalen eines Regelkreises herangezogen werden. Funktionen, die ohne Begrenzung mit der Zeit wachsen, sind im Raum L_p^n zunächst nicht enthalten. Darum ist es nötig, einen speziellen Vektorraum L_{pe}^n zu konstruieren, der sowohl beschränkte als auch unbeschränkte Vektorfunktionen enthält.

Definition 8 (Funktion $g_t(t,k)$):

Es sei $g(t,k)$ eine Vektorfunktion, die den Bereich der reellen positiven Zahlen $\mathbb{R}^+$ bzw. positiven rationalen Zahlen Z^+ auf L_p^n abbildet. k' bzw. t' sei ein beliebiger Zeitpunkt $t' \in \mathbb{R}^+$, $k' \in Z^+$. Mit $g_t(t,k)$ wird dann die Funktion bezeichnet, die für $t < t'$ bzw. $k < k'$ mit $g(t,k)$ identisch ist und sonst gleich Null ist.

Durch die Definition der Vektorfunktionen $g_t(t,k)$ ist ein erweiterter Hilbert-Raum L_{pe}^n angebbar. Die Vektorfunktion $g(t,k)$ gehört genau dann zum Raum L_{pe}^n , wenn die zugehörige Vektorfunktion $g_t(t,k)$ für alle Zeitpunkte t bzw. k Element des Raumes L_p^n ist. Da der Grenzwert von $\|g(t,k)\|_p$ nicht unbedingt zu existieren braucht, sind im Raum L_{pe}^n auch unbeschränkte Normen $\|g(k,k)\|_{pe}$ definiert. Es gilt

$$\|g(t,k)\|_{pe} = \begin{cases} \|g(t,k)\| & \text{für } g(t,k) \in L_p^n \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

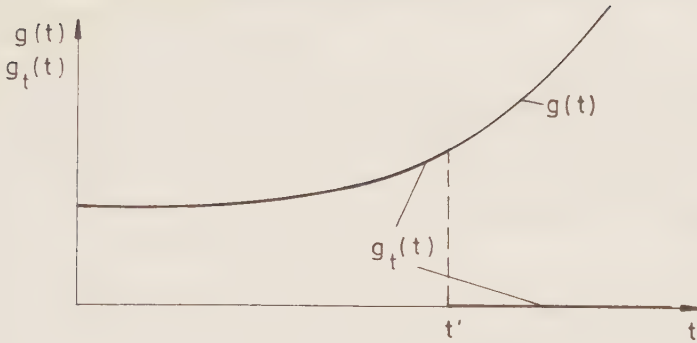


Bild A.1. Zur Definition der Funktion $g_t(t)$

Umgekehrt ergibt sich für ein $g(t,k) \in L_{pe}^n$ aus der Beziehung

$$\|g_t(t,k)\| < c \quad (A.35)$$

sofort $g(t,k) \in L_p^n$ mit

$$\|g(t,k)\| < c. \quad (A.36)$$

Für Stabilitätsbetrachtungen genügt es, im weiteren nur noch Vektorfunktionen $g_t(t,k) \in L_p^n$ zu betrachten. In dem zum Raum L_p^n gehörenden erweiterten Hilbert-Raum L_{pe}^n , der als Elemente die Vektorfunktionen $g(t,k)$ enthält, ist die Norm $\|g(t,k)\|_{pe}$ folgendermaßen definiert:

$$\|g(t)\|_{pe} = \left(\int_0^t \|g(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (A.37a)$$

$$\|g(t)\|_{\infty} = \max_{\tau \leq t} \{ \|g(\tau)\| \} \quad (A.37b)$$

oder

$$\|g(k)\|_{pe} = \left(\sum_{l=0}^k \|g(l)\|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (A.38a)$$

$$\|g(k)\|_{\infty} = \max_{l \leq k} \{ \|g(l)\| \}. \quad (A.38b)$$

Für das Skalarprodukt $\langle g(t,k), f(t,k) \rangle_{2e}$ und die Norm $\|g(t,k)\|_{2e}$ im Raum L_{2e}^n gilt speziell

$$\langle g(t), f(t) \rangle_{2e} = \int_0^t g(\tau)^T f(\tau) d\tau \quad (\text{A.39a})$$

$$\|g(t)\|_{2e}^2 = \langle g(t), g(t) \rangle_{2e} \quad (\text{A.39b})$$

$$\langle g(k), f(k) \rangle_{2e} = \sum_{l=0}^k g(l)^T f(l)^* = \|g(k)\|_{2e}^2 \quad (\text{A.40a})$$

$$\|g(k)\|_{2e}^2 = \langle g(k), g(k) \rangle_{2e} \quad (\text{A.40b})$$

A2. Die Beschreibung von Übertragungssystemen durch Operatoren

Bis jetzt wurde gezeigt, daß sich die Eingangs- und Ausgangssignale eines physikalischen Systems mathematisch durch Vektorfunktionen im Raum L_{pe}^n beschreiben lassen. Das mathematische Modell des physikalischen Systems selbst ist dann ein Operator $\underline{H}$, der die Eingangssignale $\underline{u} \in U_e$ auf die Ausgangssignale $\underline{y} \in Y_e$ eindeutig abbildet.

Definition 9 (linearer Operator):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt linear, wenn für beliebige Elemente $\underline{u}_1 \in U_e$ und $\underline{u}_2 \in U_e$ und beliebige Zahlen a, b gilt:

$$\underline{H}(a \underline{u}_1 + b \underline{u}_2) = a \underline{H} \underline{u}_1 + b \underline{H} \underline{u}_2 . \quad (\text{A.41})$$

Definition 10 (stetiger Operator):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt stetig, wenn jede konvergente Folge $\underline{u}$ eine konvergente Folge $\underline{y} = \underline{H} \underline{u}$ ergibt

$$\lim_{\underline{u} \rightarrow \underline{u}_0} \underline{H} \underline{u} = \underline{H} \underline{u}_0 , \quad (\text{A.42a})$$

d.h. ein Operator $\underline{H}$ heißt stetig, wenn zu jedem Element $\underline{u}_1 \in U_e$ und jeder Zahl $\Delta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes Element $\underline{u}_2 \in U_e$ aus

$$| \underline{u}_1 - \underline{u}_2 | < \delta \quad (\text{A.42b})$$

die Beziehung folgt

$$| \underline{H} \underline{u}_1 - \underline{H} \underline{u}_2 | < \Delta . \quad (\text{A.42c})$$

Definition 11 (inverser Operator):

Ein Operator $\underline{H}$, der je zwei verschiedenen Elementen $u \in U_e$ verschiedene Elemente $y \in Y_e$ zuordnet, besitzt einen inversen Operator $\underline{H}^{-1}$, der den Elementen $y \in Y_e$ die Elemente $u \in U_e$ zuordnet

$$\underline{u} = \underline{H}^{-1} \underline{y} . \quad (\text{A.43})$$

Definition 12 (beschränkter Operator):

Man bezeichnet den Operator $\underline{H}$ als beschränkt, wenn die Bedingung

$$\max_{\underline{u} \in U_e} \|\underline{H} \underline{u}\| < \infty \quad (\text{A.44a})$$

und

$$\underline{H} \cdot 0 = 0 \quad (\text{A.44b})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist.

Ist der Operator $\underline{H}$ beschränkt, so läßt sich in Analogie zur Vektornorm $\|\underline{u}\|$ auch eine Norm von $\underline{H}$, die Operatornorm $\|\underline{H}\|$, definieren.

Definition 13 (Operatornorm):

Die Norm eines beschränkten Operators wird durch den Ausdruck

$$\|\underline{H}\| = \max_{\underline{u} \in U} \|\underline{H} \underline{u}\| / \|\underline{u}\| , \quad \underline{u} \neq 0. \quad (\text{A.45})$$

bestimmt. Speziell für lineare Operatoren gilt:

$$\|\underline{H}\| = \max \|\underline{H} \underline{u}\| \quad \text{mit} \quad \|\underline{u}\| = 1 . \quad (\text{A.46})$$

Die Norm eines Operators erfüllt folgende Beziehungen (Desoer und Vidyasagar, 1975, Seite 22):

$$\|\underline{H} \underline{u}\| \leq \|\underline{H}\| \cdot \|\underline{u}\| \quad (\text{A.47a})$$

$$\|a \underline{H}\| = |a| \cdot \|\underline{H}\| \quad (\text{A.47b})$$

$$\|\underline{H}_1 + \underline{H}_2\| \leq \|\underline{H}_1\| + \|\underline{H}_2\| \quad (\text{A.47c})$$

$$\|\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2\| \leq \|\underline{H}_1\| \cdot \|\underline{H}_2\| . \quad (\text{A.47d})$$

Als Beispiel sollen die linearen Übertragungsmatrizen $\underline{G}(s)$ bzw. $\underline{G}(z)$ betrachtet werden

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \underline{U}(s) \quad (\text{A.48a})$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}(z) \underline{U}(z). \quad (\text{A.48b})$$

Für die Normen $\|\underline{G}(s,z)\|_\infty$ und $\|\underline{G}(s,z)\|_2$ gilt dann unter Berücksichtigung der Gln.(A.30) und (A.31) (Desoer und Vidyasagar,1975,Seite26)

$$\|\underline{G}(s)\|_\infty = \max_i \int_0^\infty \sum_{j=1}^n |g_{ij}(t)| dt \quad (\text{A.49a})$$

$$\|\underline{G}(s)\|_2 = \max_\omega \sigma_{\max}\{\underline{G}(j\omega)\} = \max_\omega \max_i \sqrt{\lambda_i\{\underline{G}(j\omega)^T \underline{G}(j\omega)\}} \quad (\text{A.49b})$$

$$\|\underline{G}(z)\|_\infty = \max_i \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=1}^n |g_{ij}(k)| \quad (\text{A.49c})$$

$$\begin{aligned} \|\underline{G}(z)\|_2 &= \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max}\{\underline{G}(e^{j\omega T})\} \\ &= \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \max_i \sqrt{\lambda_i\{\underline{G}(e^{j\omega T})^T \underline{G}(e^{j\omega T})\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.49d})$$

Das Symbol $\lambda_i\{\underline{A}(j\omega)\}$ bezeichnet dabei den i -ten Eigenwert der komplexen Matrix $\underline{A}(j\omega)$. $\lambda_i(j\omega)$ ist im allgemeinen eine komplexe Zahl und erfüllt die Gleichung

$$|\lambda_i(j\omega) \mathbf{I} - \underline{A}(j\omega)| = 0.$$

Mit dem Symbol $\sigma_{\max}\{\underline{A}(j\omega)\}$ wird der maximale singuläre Wert einer komplexen Matrix $\underline{A}(j\omega)$ bezeichnet

$$\sigma_{\max}\{\underline{A}(j\omega)\} = \max_i \sqrt{\lambda_i\{\underline{A}(j\omega)^T \underline{A}(j\omega)\}}.$$

$\sigma_{\max}\{\underline{A}(j\omega)\}$ stellt eine positive reelle Zahl dar, da die hermitesche Matrix $\{\underline{A}(j\omega)^T \underline{A}(j\omega)\}$ nur positive reelle Eigenwerte besitzt.

A3. Sektoreigenschaften von Operatoren

A3. Die Definition von Sektoren

Die einfachste Beschreibung von Sektoren ist aus der Theorie nichtlinearer Systeme bekannt. Betrachtet wird zunächst eine statische Nichtlinearität nach Bild A.2. Für die Nichtlinearität gilt

$$y = F(u). \quad (\text{A.50})$$

Die Nichtlinearität verlaufe vollständig in dem durch die beiden Grenzgeraden k_1 und k_2 beschriebenen Gebiet. Dieses Gebiet wird auch als Sektor $S(k_1, k_2)$ bezeichnet.

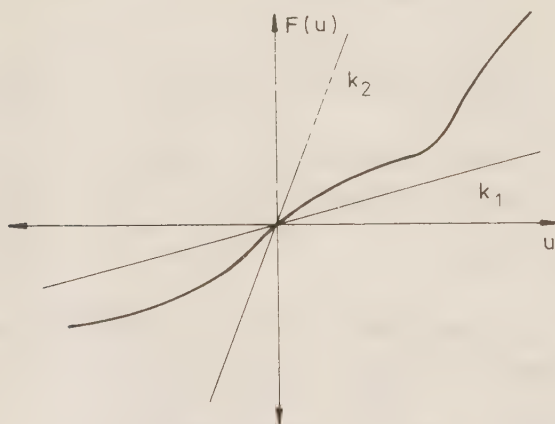


Bild A.2. Zur Definition von Sektoren für statische Nichtlinearitäten

Definition 14 (Sektorbedingung für statische Nichtlinearitäten):

Eine Nichtlinearität $F(u)$ liegt vollständig innerhalb des Sektors $S(k_1, k_2)$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$k_1 u^2 < F(u)u < k_2 u^2, \quad k_1 < k_2. \quad (\text{A.51a})$$

Sie liegt innerhalb des Sektors $S(k_1, k_2)$, wenn die Bedingung

$$k_1 u^2 \leq F(u)u \leq k_2 u^2, \quad k_1 < k_2 \quad (\text{A.51b})$$

erfüllt ist.

Die Gln.(A.51a) und (A.51b) kann auch in anderer Form angegeben werden. Aus Gl.(A.51b) folgt

$$0 \geq (F(u)u - k_1 u^2)(F(u)u - k_2 u^2) = u^2 (F(u) - k_1 u)(F(u) - k_2 u) \quad (\text{A.52})$$

und da $u^2 > 0$

$$(F(u) - k_1 u)(F(u) - k_2 u) = (F(u) - cu)^2 - r^2 u^2 \leq 0 \quad (\text{A.53})$$

mit

$$c = 0.5 (k_1 + k_2), \quad r = 0.5 (k_2 - k_1), \quad k_1 k_2 = c^2 - r^2. \quad (\text{A.54})$$

Gl.(A.53) hat die Form einer Kreisgleichung. Der Sektor $S(k_1, k_2)$ kann dann auch folgendermaßen beschrieben werden:

Definition 15 (Kreisbedingung für statische Nichtlinearitäten):

Die Abbildung einer Nichtlinearität $F(u)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(c, r)$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$|F(u) - cu| < r |u|. \quad (\text{A.55a})$$

Sie liegt innerhalb des Kreises $K(c, r)$, wenn die Bedingung

$$|F(u) - cu| \leq r |u| \quad (\text{A.55b})$$

erfüllt ist.

Für $c = 0.5(k_1 + k_2)$ und $r = 0.5(k_1 - k_2)$ sind die Definitionen 14 und 15 identisch. Betrachtet man den Spezialfall, daß im Bild A.2 die Sektorgrenzen durch $k_1 = 0$ und $k_2 = \infty$ festgelegt sind, so ergibt sich für $F(u)$ die Ungleichung

$$F(u) u \geq 0. \quad (\text{A.56})$$

Die Gl.(A.56) sagt aus, daß das Produkt aus Eingangssignal u und Ausgangssignal $F(u)$ immer positiv ist.

Definition 16 (positive Nichtlinearität):

Eine Nichtlinearität $F(u)$ heißt positiv, wenn die Bedingung

$$F(u) u \geq 0 \quad (\text{A.57a})$$

erfüllt ist. Gilt

$$F(u) u > 0, \quad (\text{A.57b})$$

so heißt die Nichtlinearität streng positiv.

Im folgenden sollen wieder allgemeine Systeme betrachtet werden, die durch Operatoren $\underline{H}$ mit $\underline{y} \in Y_e$, $\underline{u} \in U_e$

$$\underline{y} = \underline{H} \underline{u}$$

beschrieben werden können. In Anlehnung an Gl.(A.55a) bzw. Gl.(A.55b) kann dann ein Sektor für $\underline{H}$ definiert werden.

Definition 17 (konischer Operator, Kreisbedingung): (Safonov, 1980)

Der Operator $\underline{H}$ liegt innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn reelle Matrizen $\underline{R} > 0$ und $\underline{C}$ existieren, so daß die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe} \leq \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe} \quad (\text{A.58a})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn für $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe}^2 - \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe}^2 < -\eta (\|\underline{u}\|_{pe}^2 + \|\underline{H}\underline{u}\|_{pe}^2) \quad (\text{A.58b})$$

erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt außerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe} \geq \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe} \quad (\text{A.58c})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt vollständig außerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn für $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe}^2 - \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe}^2 > \eta (\|\underline{u}\|_{pe}^2 + \|\underline{H}\underline{u}\|_{pe}^2) \quad (\text{A.58d})$$

erfüllt ist.

Ein Operator, der eine der Gln.(A.58a) bis (A.58d) erfüllt, wird in Anlehnung an die englischsprachige Literatur auch als konischer ("conic") Operator bezeichnet. Die Matrix $\underline{C}$ heißt auch das Zentrum und die Matrix $\underline{R}$ der Radius des verallgemeinerten Keisesgebietes $K(\underline{C}, \underline{R})$.

In Analogie zu Gl.(A.52) können für den Operator $\underline{H}$ anstelle der Kreisbedingungen Gl.(A58a-d) auch folgende Sektorbedingungen angegeben werden:

Definition 18 (konischer Operator, Sektorbedingung):

Ein Operator $\underline{H}$ liegt innerhalb des Sektors $S(\underline{A}, \underline{B})$, wenn reelle Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ mit $\underline{A} < \underline{B}$ existieren, so daß die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} \leq 0 \quad (\text{A.59a})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt vollständig innerhalb des Sektors $S(\underline{A}, \underline{B})$, wenn für $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} < -\eta (\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} + \langle \underline{H}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} \rangle_{pe}) \quad (\text{A.59b})$$

erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt außerhalb des Sektors $S(\underline{A}, \underline{B})$, wenn die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} \geq 0 \quad (\text{A.59c})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt vollständig außerhalb des Sektors $S(\underline{A}, \underline{B})$, wenn für $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} > \eta (\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} + \langle \underline{H}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} \rangle_{pe}) \quad (\text{A.59d})$$

erfüllt ist.

Lemma A.1: Die Definitionen 17 und 18 sind für $\underline{A} < \underline{B}$ mit

$$\underline{C} = 0.5 (\underline{A} + \underline{B}), \quad \underline{R} = 0.5 (\underline{B} - \underline{A}) > 0 \quad (\text{A.60a})$$

oder

$$\underline{A} = \underline{C} - \underline{R} \quad \underline{B} = \underline{C} + \underline{R} \quad (\text{A.60b})$$

identisch.

Beweis: Im folgenden soll nur der Zusammenhang zwischen den Gln.(A.58a) und (A.59a) aufgezeigt werden. Die Ableitung der entsprechenden Beziehungen b,c und d kann in analoger Weise durchgeführt werden. Unter Beachtung der Beziehung

$$\|\underline{u}\|_{pe}^2 = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe}$$

kann Gl.(A.58a) auch in folgender Form angegeben werden:

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u} \rangle_{pe} - \langle \underline{R}\underline{u}, \underline{R}\underline{u} \rangle_{pe} \leq 0. \quad (\text{A.61})$$

Daraus folgt mit Gl.(A.20)

$$\langle \underline{H}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} \rangle_{pe} - 2\langle \underline{H}\underline{u}, \underline{C}\underline{u} \rangle_{pe} - \langle \underline{C}\underline{u}, \underline{C}\underline{u} \rangle_{pe} - \langle \underline{R}\underline{u}, \underline{R}\underline{u} \rangle_{pe} \leq 0. \quad (\text{A.62})$$

Die zu beweisende Beziehung ergibt sich durch geeignete Zusammenfassung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - (\underline{C}-\underline{R})\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - (\underline{C}+\underline{R})\underline{u} \rangle_{pe} \leq 0. \quad (\text{A.63})$$

In Analogie zu Gl.(A.57) können auch positive Operatoren definiert werden (Zames,1966, Safonov,1980):

Definition 19 (positiver Operator):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt positiv, wenn die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} \geq 0 \quad (\text{A.64a})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. Der Operator $\underline{H}$ heißt streng positiv, wenn die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} \geq \eta \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} \quad (\text{A.64b})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ und $\eta > 0$ erfüllt ist.

Die Definitionen 17,18 und 19 beschreiben bestimmte Systemeigenschaften von Opera-

toren. Verschiedene Anfangsbedingungen von internen Zustandsgrößen werden nicht speziell berücksichtigt. Definitionsgemäß stellt Y_e die Menge aller Ausgangssignale y dar, die sich durch die Abbildung $\underline{H}$ aus allen Eingangssignalen $\underline{u} \in U_e$ ergibt. Da sich für verschiedene Anfangsbedingungen auch verschiedene Ausgangssignale ergeben, müssen die Anfangsbedingungen bei der Definition eines Operators $\underline{H}$ berücksichtigt werden. Dazu werden entweder von den Anfangsbedingungen abhängige Zusatzterme in die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung aufgenommen oder die Anfangswerte werden durch eine geeignete Umrechnung in der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung berücksichtigt (Böcker, Hartmann und Zwanzig, 1986). Dies ist jedoch nur möglich, wenn durch eine von außen aufschaltbare Steuerfunktion die vorhandenen Anfangswerte erreicht werden können (siehe Bild A.3). In diesem Fall können die Definitionen 16, 17 und 18 für beliebige Anfangswerte verwendet werden. Im Einzelfall stellt die Überprüfung, ob dies erreicht werden kann, gerade für nichtlineare Operatoren ein besonderes Problem dar. Deshalb soll im folgenden eine Definition konischer Operatoren betrachtet werden, in der die Anfangswerte direkt berücksichtigt werden.

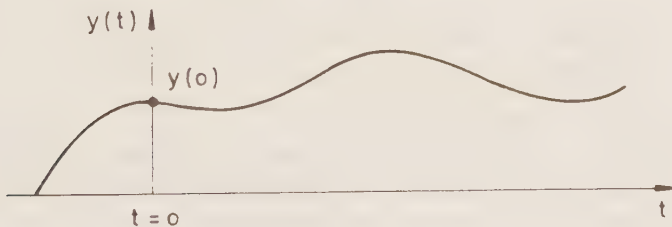


Bild A.3. Zur Berücksichtigung von Anfangswerten

Definition 20 (schwach konischer Operator, Kreisbedingung):

Der Operator $\underline{H}$ liegt innerhalb des Kreises $K_a(\underline{C}, \underline{R})$, wenn reelle Matrizen $\underline{R} \geq \underline{0}$ und $\underline{C}$ und eine nur von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante γ_0 existieren, so daß die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe}^2 - \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe}^2 \leq \gamma_0^2 \quad (\text{A.65a})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt außerhalb des Kreises $K_a(\underline{C}, \underline{R})$, wenn die Ungleichung

$$\|\underline{H}\underline{u} - \underline{C}\underline{u}\|_{pe}^2 - \|\underline{R}\underline{u}\|_{pe}^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.65b})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist.

Definition 21 (schwach konischer Operator, Sektorbedingung):

Der Operator $\underline{H}$ liegt innerhalb des Sektors $S_a(\underline{A}, \underline{B})$, wenn reelle Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$, $\underline{A} \leq \underline{B}$ und eine nur von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante γ_0 existieren, so daß die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} \leq \gamma_0^2 \quad (\text{A.65c})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist. $\underline{H}$ liegt außerhalb des Sektors $S_a(\underline{A}, \underline{B})$, wenn die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.65d})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist.

Definition 22 (schwach positiver Operator):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt schwach positiv, wenn eine nur von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante γ_0 existiert, so daß die Ungleichung

$$\langle \underline{H}\underline{u}, \underline{u} \rangle_{pe} \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.66})$$

für alle $\underline{u} \in U_e$ erfüllt ist.

Betrachtet man speziell den erweiterten Hilbertraum L_{2e} für Vektorfunktionen $\underline{u}(k)$, die im Zeitintervall $(0, \infty)$ definiert sind, so ergibt sich mit Gl.(A.40) für schwach konische Operatoren nach Gl.(A.65a) die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^N \left(\underline{y}(k) - \underline{C}\underline{u}(k) \right)^T \left(\underline{y}(k) - \underline{C}\underline{u}(k) \right) - \underline{u}(k)^T \underline{R}^T \underline{R} \underline{u}(k) \leq \gamma_0^2 \quad (\text{A.67a})$$

bzw. nach Gl.(A.65c)

$$\sum_{k=0}^N \left(\underline{y}(k) - \underline{A} \underline{u}(k) \right)^T \left(\underline{y}(k) - \underline{B} \underline{u}(k) \right) \leq \gamma_0^2 . \quad (\text{A.67b})$$

Entsprechend gilt für schwach positive Operatoren

$$\sum_{k=0}^N \underline{y}(k)^T \underline{u}(k) \geq -\gamma_0^2 . \quad (\text{A.68})$$

Für kontinuierliche Systeme ergeben sich mit Gl.(A.39) analoge Beziehungen. Gl.(A.68) wird auch als Popov-Ungleichung bezeichnet. Sie spielt in der Hyperstabilitätstheorie eine entscheidende Rolle. Systeme, die die Gleichung (A.68) erfüllen, werden auch als schwach hyperstabil bezeichnet. Aus dem Vergleich von Gl.(A.67b) und Gl.(A.68) ergibt sich, daß schwach hyperstabile Systeme, also Systeme, die durch einen schwach positiven Operator beschrieben werden können, Systeme mit speziellen Sektoreigenschaften darstellen. Die Hyperstabilitätstheorie ist also ein Spezialfall der Sektorstabilitätstheorie.

A3.2 Eigenschaften von konischen Operatoren

Satz A.1 (Eigenschaften von konischen Operatoren, Sektorbedingungen):

H sei ein konische Operator, der (vollständig) innerhalb des Sektors $S(\underline{A}, \underline{B})$ liege. Dann gilt für $\underline{B} > \underline{0}$, $a > 0$, $\underline{A} < \underline{B}$,

a) $a \underline{H}$ liegt (vollständig) innerhalb des Sektors $S(a\underline{A}, a\underline{B})$ (A.69)

b) $-\underline{H}$ liegt (vollständig) innerhalb des Sektors $S(-\underline{B}, -\underline{A})$ (A.70)

c) $\underline{H}^{-1}$ liegt (vollständig) innerhalb des Sektors $S(\underline{B}^{-1}, \underline{A}^{-1})$ für $\underline{A} > \underline{0}$ (A.71a)

$\underline{H}^{-1}$ liegt (vollständig) außerhalb des Sektors $S(\underline{A}^{-1}, \underline{B}^{-1})$ für $\underline{A} < \underline{0}$ (A.71b)

$\underline{H}^{-1} - \underline{B}^{-1}$ ist (streng) positiv für $\underline{A} = \underline{0}$ (A.71c)

d) $\underline{H} + \underline{K}$ liegt (vollständig) innerhalb des Sektors $S(\underline{A} + \underline{K}, \underline{B} + \underline{K})$ (A.72)

Alle Aussagen von Satz A.1 gelten auch für schwach konische Operatoren.

Beweis: Die Beziehungen a) und b) ergeben sich direkt aus Gl.(A.59a) durch Einsetzen von $\underline{u} = a\underline{u}'$ bzw. $\underline{u} = -\underline{u}'$

$$\langle a\underline{H} \underline{u}' - \underline{A} a \underline{u}', a\underline{H} \underline{u}' - \underline{B} a \underline{u}' \rangle_{pe} \leq 0 \quad (\text{A.73a})$$

$$\langle -\underline{H} \underline{u}' + \underline{B} \underline{u}', -\underline{H} \underline{u}' + \underline{A} \underline{u}' \rangle_{pe} \leq 0 . \quad (\text{A.73b})$$

Zum Beweis von Eigenschaft c) geht man wiederum von Gl.(A.59a) aus. Unter Beachtung von Gl.(A.13) und Gl.(A.69) gilt dann für $\underline{A} \neq \underline{Q}$, $\underline{B} \neq \underline{Q}$

$$\underline{A}\underline{B} \langle \underline{A}^{-1}\underline{H}\underline{u} - \underline{u}, \underline{B}^{-1}\underline{H}\underline{u} - \underline{u} \rangle_{pe} \leq 0. \quad (A.74)$$

Mit der Definition für den inversen Operator Gl.(A.43) folgt aus Gl.(A.74)

$$\underline{A}\underline{B} \langle \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{A}^{-1}\underline{y}, \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{B}^{-1}\underline{y} \rangle_{pe} \leq 0 \quad (A.75)$$

und da $\underline{A} < \underline{B}$, d.h. $\underline{B}^{-1} \leq \underline{A}^{-1}$

$$\langle \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{B}^{-1}\underline{y}, \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{A}^{-1}\underline{y} \rangle_{pe} \begin{cases} < 0 \text{ für } \underline{A} > \underline{Q} \\ > 0 \text{ für } \underline{A} < \underline{Q}. \end{cases} \quad (A.76)$$

Durch Gl.(A.76) wird ein Sektor für den inversen Operators $\underline{H}^{-1}$ definiert. Für $\underline{A} = \underline{Q}$ ergibt sich aus Gl.(A.59a)

$$\underline{B} \langle \underline{H}\underline{u}, \underline{B}^{-1}\underline{H}\underline{u} - \underline{u} \rangle_{pe} \leq 0 \quad (A.77)$$

und mit Gl.(A.43)

$$-\langle \underline{y}, \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{B}^{-1}\underline{y} \rangle_{pe} \leq 0 \quad (A.78)$$

oder

$$\langle \underline{y}, \underline{H}^{-1}\underline{y} - \underline{B}^{-1}\underline{y} \rangle_{pe} \geq 0. \quad (A.79)$$

Gl.(A.79) entspricht der Aussage nach Gl.(A.71c). Beziehung d) ergibt sich aus Gl.(A.59a)

$$\langle \underline{H}\underline{u} - \underline{A}\underline{u}, \underline{H}\underline{u} - \underline{B}\underline{u} \rangle_{pe} = \langle (\underline{H} + \underline{K})\underline{u} - (\underline{A} + \underline{K})\underline{u}, (\underline{H} + \underline{K})\underline{u} - (\underline{B} + \underline{K})\underline{u} \rangle_{pe} \leq 0. \quad (A.80)$$

Die Aussagen für Operatoren, die vollständig innerhalb eines Sektors liegen, oder für schwach konische Operatoren ergeben sich in gleicher Weise, wenn für den Beweis anstelle der Gl.(A.59a) die Gl.(A.59b) oder Gl.(A.65c) verwendet wird. ■

Die Eigenschaften (A.69) - (A.72) können auch für konische Operatoren definiert werden.

Satz A.2 (Eigenschaften von konischen Operatoren, Kreisbedingungen):

$\underline{H}$ sei ein konischer Operator, der (vollständig) innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$ liege. Dann gilt für $\underline{C} > \underline{Q}$, $\underline{R} > \underline{Q}$ und $a > 0$

$$a) \quad a\underline{H} \text{ liegt (vollständig) innerhalb des Kreises } K(a\underline{C}, a\underline{R}) \quad (\text{A.81})$$

$$b) \quad -\underline{H} \text{ liegt (vollständig) innerhalb des Kreises } K(-\underline{C}, \underline{R}) \quad (\text{A.82})$$

$$c) \quad \underline{H}^{-1} \text{ liegt (vollständig) innerhalb des Kreises } K(\underline{C}+\underline{R})^{-1}, (\underline{C}-\underline{R})^{-1}), \quad \underline{C} > \underline{R} \quad (\text{A.83a})$$

$$\underline{H}^{-1} \text{ liegt (vollständig) außerhalb des Kreises } K(\underline{C}-\underline{R})^{-1}, (\underline{C}+\underline{R})^{-1}), \quad \underline{C} < \underline{R} \quad (\text{A.83b})$$

$$\underline{H}^{-1} - 0.5 \underline{K}^{-1} \text{ ist (streng) positiv} \quad \text{für } \underline{C} = \underline{R} = \underline{K} \quad (\text{A.83c})$$

$$d) \quad \underline{H} + \underline{K} \text{ liegt (vollständig) innerhalb des Kreises } K(\underline{C} + \underline{K}, \underline{R}) . \quad (\text{A.84})$$

Die Aussagen von Satz A.2 gelten auch für schwach konische Operatoren.

Beweis: Die Beziehungen ergeben sich mit Gl.(A.60a) bzw. Gl.(A.60b) direkt aus den Gln.(A.69) - (A.72). ■

In einigen Fällen wird auch die Umkehrung von Gl.(A.83c) benötigt.

Lemma A.1: $\underline{H}$ sei ein konischer Operator, der für $\underline{K} > \underline{Q}$ die Beziehung

$$\underline{H} - \underline{K} \text{ ist (streng) positiv}$$

erfülle. Dann gilt

$$-\underline{H}^{-1} \text{ liegt (vollständig) innerhalb des Kreises } K(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1}). \quad (\text{A.85a})$$

Beweis: Die Aussage

$$-\underline{H}^{-1} \text{ liegt innerhalb des Kreises } K(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1})$$

lautet ausgeschrieben

$$\langle -\underline{H}^{-1} \underline{y}, -\underline{H}^{-1} \underline{y} + \underline{K}^{-1} \underline{y} \rangle \leq 0$$

oder

$$\langle \underline{H}^{-1} \underline{y}, \underline{H}^{-1} \underline{y} - \underline{K}^{-1} \underline{y} \rangle \leq 0 . \quad (\text{A.85b})$$

Wird in Gl.(A.85b) der Ausdruck $\underline{H}^{-1} \underline{y}$ durch $\underline{u}$ ersetzt so ergibt sich

$$\langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{K}^{-1} \underline{y} \rangle \leq 0 \quad (\text{A.85c})$$

oder nach Multiplikation mit $-\underline{K}$

$$\langle \underline{u}, \underline{y} - \underline{K} \underline{u} \rangle \geq 0. \quad (\text{A.85d})$$

Nach Definition 19 beschreibt Gl.(A.85d) die zu beweisende Beziehung. Der Beweis für streng positive Operatoren erfolgt in gleicher Weise. ■

Lemma A.2: $\underline{H}$ sei ein konischer Operator, der für $\underline{K} > \underline{Q}$ die Beziehung

$$\underline{H} + \underline{K} \text{ ist schwach positiv}$$

erfülle. Dann gilt

$$-\underline{H}^{-1} \text{ liegt außerhalb des Kreises } K_a(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1}). \quad (\text{A.86})$$

Beweis: Der Beweis von Lemma A.2 entspricht dem Vorgehen zum Beweis von Lemma A.1. Gl.(A.86) lautet ausgeschrieben

$$\langle -\underline{H}^{-1} \underline{y}, -\underline{H}^{-1} \underline{y} - \underline{K}^{-1} \underline{y} \rangle \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.86b})$$

oder da $\underline{H}^{-1} \underline{y} = \underline{u}$

$$\langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{K}^{-1} \underline{y} \rangle \geq -\gamma_0^2. \quad (\text{A.86c})$$

Durch Multiplikation von Gl.(A.86c) mit $\underline{K} > \underline{Q}$ ergibt sich die zu beweisende Aussage. ■

Im weiteren soll wieder der Spezialfall linearer Operatoren im Raum L_{2e} , die durch diskrete oder kontinuierliche Übertragungsmatrizen $\underline{G}(z)$ bzw. $\underline{G}(s)$ beschrieben werden, betrachtet werden.

Satz A.3 (Kreisbedingung konischer Operatoren im Frequenzbereich):

Gegeben sei eine lineare, stabile Übertragungsmatrix $\underline{G}(s,z)$ und reelle Matrizen $\underline{R} > 0$ und $\underline{C}$. $\underline{G}(s,z)$ liegt innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn die Ungleichung

$$\underline{G}(s): \quad \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \sigma_{\max} \left\{ (\underline{G}(j\omega) - \underline{C}) \underline{R}^{-1} \right\} \leq 1 - \epsilon \quad (\text{A.87a})$$

$$\underline{G}(z): \quad \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ (\underline{G}(e^{j\omega T}) - \underline{C}) \underline{R}^{-1} \right\} \leq 1 - \epsilon \quad (\text{A.87b})$$

für $1 - \epsilon \geq 0$ erfüllt ist. $\underline{G}(s, z)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, wenn die Ungleichungen (A.87a, b) für $1 - \epsilon > 0$ erfüllt sind. Gilt

$$\underline{G}(s): \quad \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sigma_{\min} \left\{ (\underline{G}(j\omega) - \underline{C}) \underline{R}^{-1} \right\} \geq 1 + \epsilon \quad (\text{A.87c})$$

$$\underline{G}(z): \quad \min_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\min} \left\{ (\underline{G}(e^{j\omega T}) - \underline{C}) \underline{R}^{-1} \right\} \geq 1 + \epsilon \quad (\text{A.87d})$$

so liegt $\underline{G}(s, z)$ (vollständig) außerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$.

Beweis: Der Beweis von Satz A.3 kann mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung durchgeführt werden (M.G. Safonov und M. Athans, 1978, M.G. Safonov, 1980). Der Vollständigkeit halber soll im Folgenden der Beweis von Gl.(A.87a) und Gl.(A.87b) kurz skizziert werden.

Betrachtet wird zunächst der Fall einer kontinuierlichen Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$. Nach Gl.(A.49b) und Gl.(A.46) wird durch Gl.(A.87a) ein beschränkter linearer Operator $(\underline{G}(s) - \underline{C}) \underline{R}^{-1}$ beschrieben

$$\|(\underline{G}(s) - \underline{C}) \underline{R}^{-1}\|_2 \leq 1 - \epsilon. \quad (\text{A.88})$$

Mit Gl.(A.47a) und $\underline{X}(s) = \underline{R} \underline{U}(s)$ folgt dann aus Gl.(A.88)

$$\|(\underline{G}(s) - \underline{C}) \underline{R}^{-1} \underline{X}(s)\|_2^2 \leq (1 - \epsilon)^2 \|\underline{X}(s)\|_2^2. \quad (\text{A.89})$$

oder

$$\|(\underline{G}(s) - \underline{C}) \underline{U}(s)\|_2^2 - \|\underline{R} \underline{U}(s)\|_2^2 \leq -(2\epsilon - \epsilon^2) \|\underline{R} \underline{U}(s)\|_2^2. \quad (\text{A.90})$$

Aus dem Vergleich von Gl.(A.58b) und Gl.(A.90) ergibt sich: $\underline{G}(s)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$, da für jedes $\epsilon > 0$ ein $\eta > 0$ existiert, so daß die Ungleichung

$$-(2\epsilon - \epsilon^2) \|\underline{R} \underline{U}(s)\|_2^2 \leq -\eta (\|\underline{U}(s)\|_2^2 + \|\underline{G}(s)\underline{U}(s)\|_2^2) \quad (\text{A.91a})$$

mit

$$\eta < (2\epsilon - \epsilon^2) / \|\underline{R}^{-1}\|^2 (1 + \|\underline{G}(s)\|^2) \quad (\text{A.91b})$$

erfüllt wird.

Der Beweis von Gl.(A.87b) erfolgt in gleicher Weise, nur wird anstelle von Gl.(A.49b) die Gl.(A.49d) verwendet. ■

Satz A.4 (positive Operatoren im Frequenzbereich):

Gegeben sei eine lineare, stabile Übertragungsmatrix $\underline{G}(s,z)$. $\underline{G}(s,z)$ ist positiv, wenn die Ungleichung

$$\underline{G}(s): \quad \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \sigma_{\min} \left\{ \underline{G}(j\omega) + \underline{G}^T(-j\omega) \right\} \geq \epsilon \quad (\text{A.92a})$$

$$\underline{G}(z): \quad \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\min} \left\{ \underline{G}(e^{j\omega T}) + \underline{G}^T(e^{-j\omega T}) \right\} \geq \epsilon \quad (\text{A.92b})$$

für $\epsilon \geq 0$ erfüllt ist. $\underline{G}(s,z)$ ist streng positiv, wenn die Ungleichungen (A.92a,b) für $\epsilon > 0$ erfüllt sind.

Beweis: Der Beweis von Satz A.4 kann der Literatur (Deseor und Vidyasagar, 1975, Kosut und Friedlander, 1982) entnommen werden. ■

Ein Vergleich der Gln.(A.92a,b) mit der Definition von positiv reellen Übertragungsmatrizen (Hitz und Anderson, 1969) ergibt, daß (streng) positiv reelle Übertragungsmatrizen durch lineare, (streng) positive Operatoren beschrieben werden können.

A4. Funktionalanalytische Methoden zur Stabilitätsanalyse von Regelkreisen

A4.1. Stabilitätsdefinitionen

Definition A.23 (schwache L_p -Stabilität):

Ein Operator $\underline{H}$, der die Eingangssignale $\underline{u} \in U_e$ eines Übertragungssystems auf die Ausgangssignale $\underline{y} \in Y_e$ eindeutig abbildet, heißt schwach L_p -stabil, wenn eine stetige, monoton steigende Funktion φ existiert, so daß für alle $\underline{u} \in U_e$ die Ungleichung

$$\|\underline{y}\|_{pe} \leq \varphi(\|\underline{u}\|_{pe}) \quad (\text{A.93})$$

erfüllt ist.

Definition A.24 (L_p -Stabilität):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt L_p -stabil, wenn Konstanten c_0 und c_1 existieren, so daß für alle $\underline{u} \in U_e$ die Ungleichung

$$\|\underline{y}\|_{pe} \leq c_0 + c_1 \|\underline{u}\|_{pe} \quad (\text{A.94})$$

erfüllt ist. Der Operator $\underline{H}$ heißt auch beschränkt, c_0 ist eine Konstante, die nur von den Anfangsbedingungen abhängt und c_1 entspricht der Norm des Operators $\underline{H}$.

Speziell für $p = 2$ und $p = \infty$ gilt für diskrete Systeme

$$p = 2 : \quad \sum_{k=0}^N \underline{y}(k)^T \underline{y}(k) \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{u}(k)^T \underline{u}(k) \quad (\text{A.95})$$

$$p = \infty : \quad \max_{l \leq k} \{ \underline{y}(l)^T \underline{y}(l) \} \leq c_0 + c_1 \max_k \{ \underline{u}(l)^T \underline{u}(l) \} . \quad (\text{A.96})$$

Gl.(A.96) sagt aus, daß beschränkte Eingangssignale $\underline{u}$ immer beschränkte Ausgangssignale $\underline{y}$ zur Folge haben. Die Begriffe L_∞ -Stabilität und BIBO-Stabilität (bounded input - bounded output) sind also äquivalent.

Definition A.25 (asymptotische L_p -Stabilität):

Ein Operator $\underline{H}$ heißt asymptotisch L_p -stabil, wenn er L_p -stabil ist und für $\underline{u}(k,t) = 0$ und $k > k_0$ bzw. $t > t_0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt

$$\|\underline{y}(k,t)\| < \delta. \quad (\text{A.97})$$

Eine Aussage über das Abklingverhalten eines Signals ist in dem Begriff der L_p -Stabilität zunächst nicht enthalten. Ein mögliches Maß ergibt sich, wenn exponentiell gewichtete Signale

$$\underline{y}_\epsilon(t) = e^{\epsilon t} \underline{y}(t), \quad \epsilon \geq 0 \quad (\text{A.98a})$$

$$\underline{y}_\epsilon(k) = \epsilon^{-k} \underline{y}(k), \quad 0 < \epsilon \leq 1 \quad (\text{A.98b})$$

oder in Operatorschreibweise

$$\underline{y}_\epsilon(t) = E_\epsilon \underline{y}(t) \quad (\text{A.98c})$$

$$\underline{y}_\epsilon(k) = E_\epsilon \underline{y}(k) \quad (\text{A.98d})$$

betrachtet werden.

Definition A.26 (exponentielle L_p -Stabilität):

Ein Operator $\underline{H}$, der die Eingangssignale $\underline{u} \in U_e$ eines Übertragungssystems auf die Ausgangssignale $\underline{y} \in Y_e$ eindeutig abbildet, heißt (schwach) exponentiell L_p -stabil vom Grad ϵ , wenn der Operator $\underline{H}_\epsilon$, der sich durch exponentielle Gewichtung der Eingangs- und Ausgangssignale ergibt

$$\underline{H}_\epsilon = E_\epsilon \underline{H} E_\epsilon^{-1} \quad (\text{A.99a})$$

$$\underline{H}_\epsilon = E_\epsilon \underline{H} E_\epsilon^{-1}, \quad (\text{A.99b})$$

(schwach) L_p -stabil ist.

Ein Blockschaltbild des diskreten Operators $\underline{H}_\epsilon$ ist im Bild A.4 dargestellt.

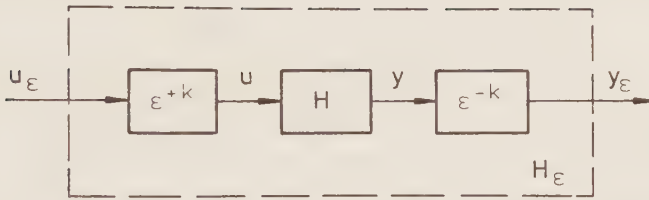


Bild A.4. Zur Definition exponentiell gewichteter Operatoren

Ein diskreter exponentiell L_2 -stabiler Operator erfüllt demnach die Bedingung

$$\sum_{k=0}^N y(k)^T y(k) \epsilon^{-2k} \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N u(k)^T u(k) \epsilon^{-2k}. \quad (\text{A.100})$$

Eine Aussage über den Zusammenhang zwischen exponentieller L_2 -Stabilität und L_∞ -Stabilität oder BIBO-Stabilität macht der folgende Satz.

Satz A.5 (Zusammenhang zwischen L_2 -Stabilität und L_∞ -Stabilität):

Ein Operator $\underline{H}$ ist L_∞ -stabil oder BIBO-stabil, d.h.

$$\|y(k)\|_\infty < c_0 + c_1 \|u(k)\|_\infty \quad \text{mit } c_1 = \|\underline{H}\|_\infty, \quad (\text{A.101a})$$

wenn der zugehörige Operator $\underline{H}_\epsilon$ exponentiell L_2 -stabil ist, d.h.

$$\|y_\epsilon(k)\|_2 < c_0 + c'_1 \|u_\epsilon(k)\|_2 \quad \text{mit } c'_1 = \|\underline{H}_\epsilon\|_2. \quad (\text{A.101b})$$

Beweis: Ist der Operator $\underline{H}_\epsilon$ exponentiell L_2 -stabil, so gilt mit Gl.(A.100)

$$\sum_{k=0}^N y(k)^T y(k) \epsilon^{2(N-k)} \leq c_0 + c'_1 \sum_{k=0}^N u(k)^T u(k) \epsilon^{2(N-k)}. \quad (\text{A.102})$$

Für den linken Teil der Ungleichung (A.102) kann die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^N y(k)^T y(k) \epsilon^{2(N-k)} \geq y(N)^T y(N) \quad (\text{A.103})$$

angegeben werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{y}(N)^T \underline{y}(N) &\leq c_0 + c'_1 \max_{k \leq N} \{ \underline{u}(k)^T \underline{u}(k) \} \sum_{k=0}^N \epsilon^{2(N-k)} \\ &\leq c_0 + \frac{c'_1}{1-\epsilon^2} \max_{k \leq N} \{ \underline{u}(k)^T \underline{u}(k) \} , \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

d.h. der Operator $\underline{H}$ ist L_∞ -stabil. ■

Lemma A.3: Für diskrete lineare Übertragungssysteme, die im Frequenzbereich durch die Übertragungsmatrix $\underline{G}(z)$ bzw. im Zeitbereich durch die Gewichtsmatrix $\underline{G}(k)$ beschrieben werden können

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}(z) \underline{U}(z) \quad (\text{A.105a})$$

$$\underline{y}(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \underline{G}(k-\nu) \underline{u}(\nu) , \quad (\text{A.105b})$$

lautet die exponentiell gewichtete Übertragungsmatrix $\underline{G}_\epsilon(z)$ bzw. Gewichtsmatrix $\underline{G}_\epsilon(k)$

$$\underline{G}_\epsilon(z) = \underline{G}(\epsilon z) \quad (\text{A.106})$$

$$\underline{G}_\epsilon(k) = \epsilon^{-k} \underline{G}(k) . \quad (\text{A.107})$$

Beweis: Aus Gl.(A.105b) ergibt sich durch Einsetzen von Gl.(A.98b)

$$\underline{y}_\epsilon(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{k-\nu} \underline{G}(k-\nu) \underline{u}_\epsilon(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \underline{G}_\epsilon(k-\nu) \underline{u}_\epsilon(\nu) . \quad (\text{A.108})$$

Gl.(A.106) entsteht durch die Anwendung des Ähnlichkeitssatzes für die Z-Transformation auf Gl.(A.108). ■

Lemma A.4: Eine diskrete lineare Übertragungsmatrix $\underline{G}(z)$ ist exponentiell stabil vom Grad ϵ , d.h.

$$\|\underline{y}_\epsilon(k)\|_p \leq c_0 + c_1 \|\underline{u}_\epsilon(k)\|_p \quad \text{mit} \quad c_1 = \|\underline{G}(\epsilon z)\|_p , \quad (\text{A.109})$$

wenn alle Pole innerhalb eines Kreises mit dem Radius ϵ um den Ursprung der z -Ebene liegen.

Beweis: Nach Definition A.24 und A.25 ist Gl.(A.109) dann erfüllt, wenn der Operator $\underline{G}(\epsilon z)$ L_p -stabil ist. Dies ist für lineare Systeme genau dann erfüllt, wenn alle Pole z_{pi} im Einheitskreis der z -Ebene liegen. Aus der Beziehung $|z_{pi}| < 1$ folgt dann sofort $|\epsilon z_{pi}| < \epsilon$, d.h. alle Pole der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z)$ müssen innerhalb eines Kreises mit dem Radius ϵ um den Ursprung der z -Ebene liegen. ■

A4.2 Das allgemeine Sektor-Stabilitätstheorem

Das Sektor-Stabilitätstheorem wird in allgemeiner Form von Safonov (1980) angegeben. Es geht auf frühere Arbeiten von Zames (1966) zurück, der die Stabilität von rückgekoppelten Systemen nach Bild A.5 mit funktionalanalytischen Methoden untersucht hat.

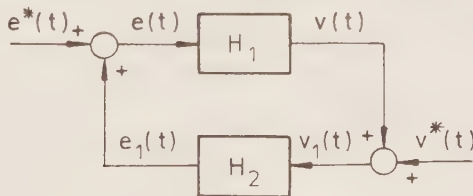


Bild A.5. Der Grundregelkreis nach Zames

Safonov geht von verallgemeinerten Beziehungen (Bild A.6) aus. $\underline{H}_1(\underline{e}^*)$ und $\underline{H}_2(\underline{v}^*)$ sind dabei nichtlineare Operatoren, die von den auf den Regelkreis einwirkenden Signalen $\underline{e}^*(k)$ und $\underline{v}^*(k)$ abhängen. Das Stabilitätstheorem von Safonov macht Aussagen über die Beschränktheit der im Regelkreis auftretenden Signale $\underline{e}_1(k)$ und $\underline{v}(k)$, wenn die Operatoren $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ verallgemeinerte Sektorbedingungen erfüllen. Die Sektorparameter $\underline{C}$ und $\underline{R}$ können im allgemeinen Fall beliebige Operatoren darstellen. Außerdem werden explizit keine Anfangsbedingungen betrachtet. Diese müssen bei der Definition der Operatoren $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ berücksichtigt werden. Aus diesen Gründen wird im

folgenden ein einfaches Sektor-Stabilitätstheorem angegeben, das eine Aussage über die global asymptotische Stabilität der rückgekoppelten Struktur nach Bild A.7 ermöglicht.

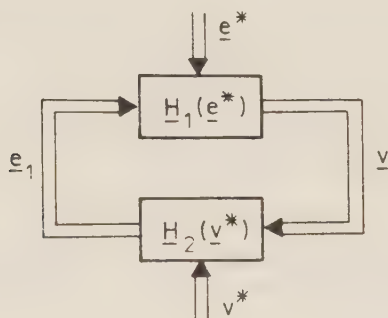


Bild A.6. Der Grundregelkreis nach Safonov

Theorem A.1 (allgemeines Sektor-Stabilitätstheorem):

Gegeben sei das rückgekoppelte System nach Bild A.7.

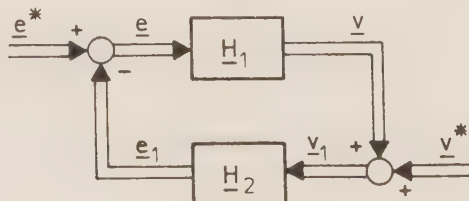


Bild A.7. Der Grundregelkreis in Standardstruktur

mit

$$\underline{v}(k) = \underline{H}_1 \underline{e}(k) = \underline{H}_1 (\underline{e}^*(k) - \underline{e}_1(k)) \quad (\text{A.110a})$$

$$\underline{e}_1(k) = \underline{H}_2 \underline{v}_1(k) = \underline{H}_2 (\underline{v}^*(k) + \underline{v}(k)) . \quad (\text{A.110b})$$

$\underline{e}(k)$, $\underline{e}^*(k)$, $\underline{e}_1(k)$, $\underline{v}(k)$, $\underline{v}^*(k)$ und $\underline{v}_1(k)$ seien Vektorfunktionen, die im Raum L_{pe}^n definiert sind. $\underline{C}$ und $\underline{R}$ seien reelle symmetrische Matrizen, die die Bedingung $\underline{C} \geq \underline{R} \geq 0$ erfüllen. $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ seien Operatoren, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\underline{H}_1: \sum_{k=0}^N \left(\underline{v}(k) - \underline{C}\underline{e}(k) \right)^T \left(\underline{v}(k) - \underline{C}\underline{e}(k) \right) - \underline{e}^T(k) \underline{R}^T \underline{R} \underline{e}(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.111})$$

d. h. $\underline{H}_1$ liegt schwach außerhalb des Kreises $K_a(\underline{C}, \underline{R})$ und

$$\begin{aligned} \underline{H}_2: \sum_{k=0}^N \left(\underline{v}_1(k) + \underline{C}\underline{e}_1(k) \right)^T \left(\underline{v}_1(k) + \underline{C}\underline{e}_1(k) \right) - \underline{v}_1^T(k) \underline{R}^T \underline{R} \underline{v}_1(k) < \\ -\eta \sum_{k=0}^N \underline{v}_1^T(k) \underline{v}_1(k) + \underline{e}_1^T(k) \underline{e}_1(k) \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

d. h. $-\underline{H}_2^{-1}$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{C}, \underline{R})$.

Dann ist das rückgekoppelte System nach Bild A.7 global asymptotisch L_2 -stabil und es gilt

$$\sum_{k=0}^N \underline{e}_1^T(k) \underline{e}_1(k) + \underline{v}^T(k) \underline{v}(k) \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}^{*T}(k) \underline{e}^*(k) + \underline{v}^{*T}(k) \underline{v}^*(k). \quad (\text{A.113})$$

Beweis: Für Eingrößensysteme wurde das allgemeine Sektor-Stabilitätstheorem in der modifizierten Form zuerst von Cluett, Shah und Fischer (1986) bewiesen. Der Beweis von Theorem A.1 stellt eine systematische Erweiterung für Mehrgrößensysteme dar. Die Gln. (A.111) und (A.112) lassen sich auch in der Form

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k) \underline{v}(k) - \underline{e}^T(k) \underline{A} \underline{v}(k) + \underline{e}^T(k) \underline{B} \underline{e}(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.114a})$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \underline{v}_1^T(k) \underline{v}_1(k) + \underline{v}_1^T(k) \underline{A} \underline{e}_1(k) - \underline{e}_1^T(k) \underline{B} \underline{e}_1(k) \\ < -\eta \sum_{k=0}^N \underline{v}_1^T(k) \underline{v}_1(k) + \underline{e}_1^T(k) \underline{e}_1(k) \end{aligned} \quad (\text{A.114b})$$

mit $\underline{A} = 2\underline{C} \geq \underline{0}$ und $\underline{B} = \underline{C}^T \underline{C} - \underline{R}^T \underline{R} \geq \underline{0}$ darstellen. Werden in den Gln. (A.111) und (A.112) die Vektorfunktionen $\underline{e}_1(k)$ und $\underline{v}_1(k)$ nach Bild A.7 durch

$$\underline{e}(k) = \underline{e}^*(k) - \underline{e}_1(k) \quad (\text{A.115a})$$

$$\underline{v}_1(k) = \underline{v}(k) + \underline{v}^*(k) \quad (\text{A.115b})$$

ersetzt, so ergibt sich

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{A}\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}_1(k) - \underline{e}^{*T}(k)\underline{A}\underline{v}(k) + \underline{e}^{*T}(k)\underline{B}\underline{e}^*(k) - 2\underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}^*(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.116a})$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{A}\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}_1(k) \\ & + \sum_{k=0}^N \underline{v}^{*T}(k)\underline{A}\underline{e}_1(k) + \underline{v}^{*T}(k)\underline{v}^*(k) + 2\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}(k) \\ & < \eta \sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k) + \underline{v}^{*T}(k)\underline{v}^*(k) + 2\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{e}_1(k). \quad (\text{A.116b}) \end{aligned}$$

Da die ersten drei Terme in Gl.(A.116a) und Gl.(A.116b) übereinstimmen, können die beiden Ungleichungen zusammengefaßt werden

$$\begin{aligned} & \eta \sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k)\underline{e}_1(k) + \sum_{k=0}^N 2(1+\eta)\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}(k) + \underline{v}^{*T}(k)\underline{A}\underline{e}_1(k) \\ & + \underline{e}^{*T}(k)\underline{A}\underline{v}(k) + 2\underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}^*(k) - \sum_{k=0}^N (1+\eta)\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}^*(k) + \underline{e}^{*T}(k)\underline{B}\underline{e}^*(k) \\ & \leq \gamma_0^2. \quad (\text{A.117}) \end{aligned}$$

Für den zweiten Summenausdruck kann mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgende Abschätzung angegeben werden

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^N 2(1+\eta)\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}(k) + \underline{v}^{*T}(k)\underline{A}\underline{e}_1(k) + \underline{e}^{*T}(k)\underline{A}\underline{v}(k) + 2\underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}^*(k) \right| \\ & \leq 2(1+\eta) \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^{*T}(k)\underline{v}^*(k)} \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k)} + a \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^{*T}(k)\underline{v}^*(k)} \\ & \quad \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}_1^T(k)\underline{e}_1(k)} + a \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}^{*T}(k)\underline{e}^*(k)} \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k)\underline{v}(k)} \\ & \quad + 2b \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}_1^T(k)\underline{e}_1(k)} \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}^{*T}(k)\underline{e}^*(k)} \quad (\text{A.118}) \end{aligned}$$

oder

$$\sum_{k=0}^N 2(1+\eta)\underline{v}^{*T}(k)\underline{v}(k) + \underline{v}^{*T}(k)\underline{A}\underline{e}_1(k) + \underline{e}^{*T}(k)\underline{A}\underline{v}(k) + 2\underline{e}_1^T(k)\underline{B}\underline{e}^*(k)$$

$$\geq -k_0 \left\{ \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^* T(k) \underline{v}(k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}^* T(k) \underline{e}(k)} \right\} \left\{ \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}_1 T(k) \underline{e}_1(k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v} T(k) \underline{v}(k)} \right\} \quad (\text{A.119})$$

mit $a = \lambda_{\max}\{\underline{A}\}$, $b = \lambda_{\max}\{\underline{B}\}$ und $k_0 = \max\{a, 2b, 2(1+\eta)\}$. Wird die Abschätzung nach Gl.(A.119) in Gl.(A.117) eingesetzt, so erhält man mit $k_1 = \max\{b, 1+\eta\}$

$$\begin{aligned} \eta \sum_{k=0}^N \underline{v} T(k) \underline{v}(k) + \underline{e}_1 T(k) \underline{e}_1(k) - k_1 \sum_{k=0}^N \underline{v}^* T(k) \underline{v}(k) + \underline{e}^* T(k) \underline{e}(k) \\ - k_0 \left\{ \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v}^* T(k) \underline{v}(k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}^* T(k) \underline{e}(k)} \right\} \left\{ \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{e}_1 T(k) \underline{e}_1(k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^N \underline{v} T(k) \underline{v}(k)} \right\} \leq \gamma_0^2. \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

Der erste Summenausdruck stellt in Gl.(A.120) den einzigen positiven Term dar. Dementsprechend ist die Ungleichung für

$$\begin{aligned} \eta \sum_{k=0}^N \underline{v} T(k) \underline{v}(k) + \underline{e}_1 T(k) \underline{e}_1(k) \leq \gamma_0^2 + k_1 \sum_{k=0}^N \underline{v}^* T(k) \underline{v}(k) \\ + \underline{e}^* T(k) \underline{e}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

sicher erfüllt. Um tatsächlich abschätzen zu können, unter welchen Bedingungen Gl.(A.120) noch erfüllt ist, wird zunächst angenommen, daß der Term auf der linken Seite von Gl.(A.121) nicht beschränkt ist, sondern über alle Grenzen wächst. Dann existieren positive Konstanten c_0 und c_1 , so daß für

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \underline{v} T(k) \underline{v}(k) + \underline{e}_1 T(k) \underline{e}_1(k) \geq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{v}^* T(k) \underline{v}(k) \\ + \underline{e}^* T(k) \underline{e}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

Gl.(A.120) nur für $\eta < 0$ erfüllt ist. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung in Gl.(A.112). Damit ist Gl.(A.114) bewiesen. Zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität wird Gl.(A.122b) für den Fall $\underline{v}(k) = \underline{e}(k) = \underline{0}$ betrachtet. Aus

$$\sum_{k=0}^N \underline{v}^T(k) \underline{v}(k) + \underline{e}_1^T(k) \underline{e}_1(k) \leq c_5 \quad (\text{A.123})$$

folgt sofort

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{v}(k) = \underline{0} \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}_1(k) = \underline{0} \quad , \quad (\text{A.124})$$

d.h. der Regelkreis nach Gl.(A.110) und Gl.(A.111) ist global asymptotisch L_2 -stabil. ■

A5. Stabilitätstheoreme für den nichtlinearen Standardregelkreis

Betrachtet wird der nichtlineare Standardregelkreis mit linearer Rückführung nach Bild A.8

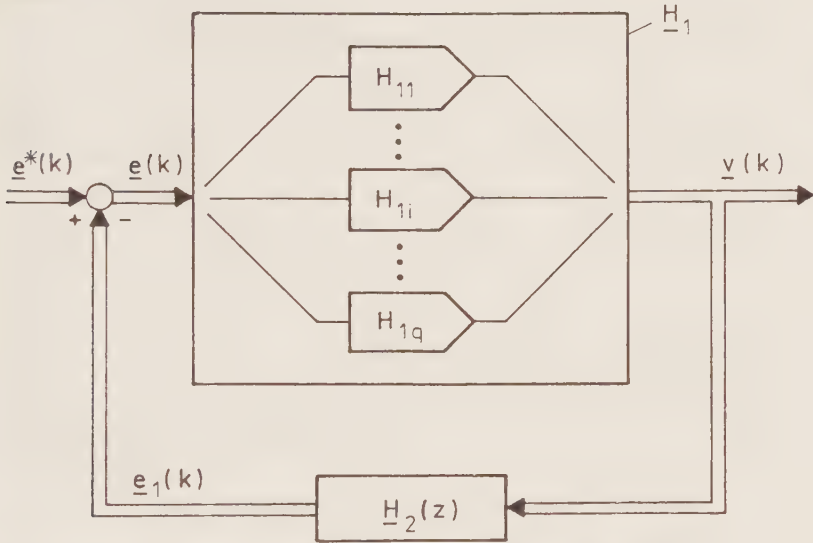


Bild A.8. Nichtlinearer Standardregelkreis mit linearer Rückführung

mit

$$\underline{e}(k) = -\underline{H}_2 \underline{v}(k) + \underline{e}^*(k) \quad (\text{A.125})$$

und

$$v_i(k) = H_{1i} e_i(k) \quad i=1, \dots, q. \quad (\text{A.126})$$

Dann gilt folgendes Theorem:

Theorem A.2 (erstes Sektor-Stabilitätstheorem):

Der nichtlineare Operator H_{1i} werde durch die Beziehung

$$\sum_{k=0}^N \left(v_i(k) - C_i e_i(k) \right)^2 - R_i^2 e_i(k)^2 \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.127})$$

beschrieben, d. h.

H_{1i} liege schwach außerhalb des Kreises $K_a(C_i, R_i)$, $C_i \geq R_i > 0$.

$\underline{H}_2(z)$ sei eine lineare, stabile, zeitinvariante Rückführmatrix, die

a) für $R_i < C_i$ die Bedingung

$\underline{H}_2(z)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{C}', \underline{R}')$,

mit

$$\underline{C}' = \text{diag} \{C'_i\}, \quad \underline{R}' = \text{diag} \{R'_i\}, \quad (\text{A.128})$$

$$C'_i = \frac{-C_i}{C_i^2 - R_i^2}, \quad R'_i = \frac{R_i}{C_i^2 - R_i^2}; \quad (\text{A.129})$$

oder

$$\max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ (\underline{H}_2(e^{j\omega T}) - \underline{C}') \underline{R}'^{-1} \right\} < 1 \quad (\text{A.130})$$

wobei $\sigma_{\max} \{ \underline{A} \}$ den maximalen singulären Wert der komplexen Matrix $\underline{A}$ bezeichnet, oder

b) für $R_i = C_i = K_i > 0$ die Bedingung

$\underline{H}_2(z) - \underline{K}'$ ist streng positiv

mit

$$\underline{K}' = \text{diag} \{K'_i\}, \quad K'_i = 0.5 K_i^{-1} \quad (\text{A.131})$$

oder

$$\max_{0 \leq \omega < 2\pi/T} \lambda_{\min} \left\{ -\underline{H}_2(e^{j\omega T}) + \underline{H}_2^T(e^{-j\omega T}) - 2\underline{K}' \right\} > 0 \quad (\text{A.132})$$

erfülle. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^N \underline{e}_1(k)^T \underline{e}_1(k) + \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) \leq c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}^{*T}(k) \underline{e}^*(k) \quad (\text{A.133})$$

d. h. der Regelkreis nach Bild A.9 ist global asymptotisch L_2 -stabil.

Beweis: Die Gl.(A.129) beschreibt für den Eingrößenfall die Sektorbedingung (A.67a) für schwach konische Operatoren. Werden die Parameter C_i und R_i für $i=1, \dots, q$ zu diagonalen Matrizen $\underline{C}$ und $\underline{R}$ zusammengefaßt, so ergibt sich für $\underline{H}_1$ gerade die Sektorbedingung (A.111) aus Theorem A.1

$$\sum_{k=0}^N \left(\underline{v}(k) - \underline{C} \underline{e}(k) \right)^T \left(\underline{v}(k) - \underline{C} \underline{e}(k) \right) - \underline{e}^T(k) \underline{R} \underline{R} \underline{e}(k) \geq -\gamma_0^2. \quad (\text{A.134})$$

Damit Theorem A.1 für den Beweis von Theorem A.2 verwendet werden kann, muß die Beziehung für $-\underline{H}_2^{-1}$ aus Theorem A.1

$$-\underline{H}_2^{-1} \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}, \underline{R})$$

modifiziert werden. Betrachtet wird zunächst der Fall $R_i < C_i$.

a) Aus der Bedingung $R_i < C_i$, $i=1, \dots, q$, ergibt sich für die diagonalen Matrizen $\underline{R}$ und $\underline{C}$ die Ungleichung $\underline{R} < \underline{C}$. Dann folgt durch Anwendung des Satzes A.2 die Äquivalenz der Sektorbedingungen

$$-\underline{H}_2^{-1}(z) \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}, \underline{R})$$

und

$$\underline{H}_2(z) \text{ liegt vollständig innerhalb des Kreises } K(\underline{C}', \underline{R}'),$$

mit

$$\underline{C}' = -(\underline{C} + \underline{R})^{-1}, \quad \underline{R}' = (\underline{C} - \underline{R})^{-1}. \quad (\text{A.135})$$

Gl.(A.130b) ergibt sich durch Einsetzen von R_i und C_i in Gl.(A.135). Da $\underline{H}_2(z)$ eine lineare, stabile, zeitinvariante Übertragungsmatrix darstellt, kann Satz A.3 angewendet werden. Gl.(A.131) beschreibt die Sektoreigenschaft für $\underline{H}_2(z)$ im Frequenzbereich.

b) Der Beweis von Teil b) des Theorems ergibt sich durch analoges Vorgehen aus Theorem A.1, Satz A.4 und Lemma A.1 für den Fall $\underline{R} = \underline{C} = \underline{K}$. ■

Für positive Operatoren H_{1i} gilt folgendes Theorem:

Theorem A.3 (zweites Sektor-Stabilitätstheorem):

Der nichtlineare Operator H_{1i} werde durch die Beziehung

$$\sum_{k=0}^N (v_i(k) + K_i e_i(k)) e_i(k) \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A.136})$$

beschrieben, d. h.

$H_{1i} + K_i$ sei schwach positiv

$\underline{H}_2(z)$ sei eine lineare, stabile, zeitinvariante Rückführmatrix, die die Bedingung

$\underline{H}_2(z)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(\underline{K}', \underline{K}')$,

mit

$$\underline{K}' = \text{diag} \{K_i'\} \quad , \quad K_i' = 0.5K_i^{-1} \quad , \quad (\text{A.137})$$

oder

$$\max_{0 \leq \omega \leq 2\pi/T} \sigma_{\max} \left\{ (\underline{H}_2(e^{j\omega T}) - \underline{K}') \underline{K}^{-1} \right\} < 1 \quad (\text{A.138})$$

erfüllt. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^N \underline{e}_1(k)^T \underline{e}_1(k) + \underline{v}(k)^T \underline{v}(k) < c_0 + c_1 \sum_{k=0}^N \underline{e}^{*T}(k) \underline{e}^*(k) \quad (\text{A.139})$$

d. h. der Regelkreis nach Bild A.9 ist global asymptotisch L_2 -stabil.

Beweis: Der Beweis des Theorems ergibt sich durch Anwendung von Theorem A.1, Satz A.1 und Lemma A.2. Werden die Parameter K_i für $i=1, \dots, q$ zu einer diagonalen Matrix $\underline{K}$ zusammengefaßt, so ergibt sich für $\underline{H}_1$ die Sektorbedingung

$\underline{H}_1 + \underline{K}$ ist schwach positiv.

Durch Anwendung von Lemma A.2 ergibt sich daraus die Sektorbedingung für $\underline{H}_1$

$-\underline{H}_1^{-1}$ liegt außerhalb des Kreises $K_a(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1})$.

Nach Satz A.3 beschreibt Gl.(A.138) die Sektoreigenschaft für $\underline{H}_2(z)$

$\underline{H}_2(z)$ liegt vollständig innerhalb des Kreises $K(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1})$

im Frequenzbereich. Theorem A.1 ist für den Beweis von Theorem A.3 direkt nicht verwendbar, da dort formal die Beziehungen für $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ vertauscht sind. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, da in diesem Fall im Beweis von Theorem A.1 in den Gln.(A.114a) und (A.114b) die Vektoren $\underline{v}(k)$ und $\underline{e}(k)$ bzw. $\underline{v}_1(k)$ und $\underline{e}_1(k)$ ebenfalls vertauscht werden müssen. Die Ableitung von Gl.(A.139) kann dann in gleicher Weise durchgeführt werden. ■

Theorem A.3 ist sehr eng mit dem Hyperstabilitätstheorem (Landau,1978) verwandt. Werden in das Blockschaltbild für den rückgekoppten Regelkreis nach Bild A.8 zwei zusätzliche Rückführungen eingebaut, so ergibt sich die bekannte Standardstruktur nach Bild A.9

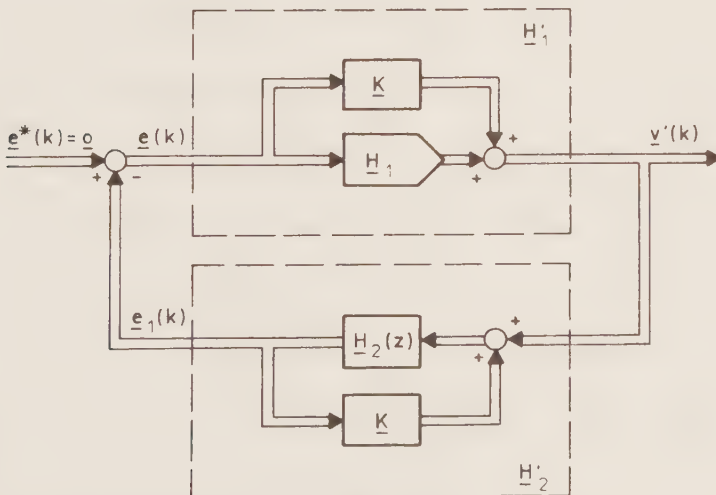


Bild A.9. Standardstruktur für den Hyperstabilitätsnachweis

mit

$$\underline{H}'_1 = \underline{H}_1 + \underline{K} \quad , \quad \underline{H}'_2(z) = (\underline{H}_2(z)^{-1} + \underline{K})^{-1}. \quad (\text{A.140})$$

Der rückgekoppelte Kreis nach Bild A.9 ist hyperstabil wenn $\underline{H}'_1$ schwach hyperstabil oder nach Gl.(A.68) schwach positiv und $\underline{H}'_2(z)$ streng positiv reell ist. Nach Satz A.2 ist $\underline{H}'_2(z)^{-1}$ und damit auch $\underline{H}'_2(z)$ aber gerade streng positiv reell, wenn $\underline{H}_2(z)$ vollständig innerhalb des Kreises $K(0.5\underline{K}^{-1}, 0.5\underline{K}^{-1})$ liegt. Damit stimmen die Bedingungen in beiden Theoremen überein.

Anhang B

B1. Lemma B1

Die Summe über das Produkt zweier Folgen $a(k)$ und $b(k)$, die im Bereich $0 \leq k \leq N$ definiert seien, kann durch folgende Formel berechnet werden

$$\sum_{k=0}^N a(k) b(k) = a(N+1) \sum_{l=0}^N b(l) + \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) \left[a(k) - a(k+1) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Beweis: Wird in der Gleichung

$$\sum_{k=0}^N a(k) b(k) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) a(k) - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{k-1} b(l) a(k) \quad (\text{B.2})$$

in der zweiten Doppelsumme der Zählindex k erniedrigt, so ergibt sich durch Erweiterung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a(k) b(k) &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) a(k) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k b(l) a(k+1) + a(N+1) \sum_{l=0}^N b(l) \\ &\quad - a(N+1) \sum_{l=0}^N b(l) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) a(k) - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k b(l) a(k+1) + a(N+1) \sum_{l=0}^N b(l). \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Gleichung (B.1) ergibt sich durch Zusammenfassung der ersten beiden Terme in Gl.(B.3).

B2. Das Bellmann-Gronwall-Lemma (Desoer und Vidyasagar, 1975)

$u(k)$, $f(k)$, $h(k)$ seien Folgen mit reellen Elementen, die im Bereich $0 \leq k \leq N$ definiert seien. Es gelte $h(k) > 0$ für alle $k \leq N$. Ist dann die Beziehung

$$u(N) \leq f(N) + \sum_{k=0}^{N-1} h(k) u(k) \quad (\text{B.4})$$

erfüllt, so folgt

$$u(N) \leq f(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \prod_{j=k}^{N-1} [1 + h(j)] \right\} h(k) f(k). \quad (\text{B.5})$$

Beweis: siehe Desoer und Vidyasagar (1975), Seite 254.

B3. Satz über das Argument einer komplexen Funktion (Parks und Hahn, 1981)

Betrachtet wird eine komplexe Funktion $f(z)$ mit $z = \sigma + j \omega$ und

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + z^n} = K \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_n)}{\prod_{i=1}^n (z - z_p)} \quad (\text{B.6})$$

Wenn die Variable z eine geschlossene Kurve C , auf der keine Pole z_p und keine Nullstellen z_n liegen dürfen, in der komplexen z -Ebene einmal entgegen den Uhrzeiger durchläuft, ändert sich das Argument der Funktion $f(z)$ (d.h. die Phase) genau um

$$\Delta \arg f(z) = 2 \pi [N - P], \quad (\text{B.7})$$

wobei mit $\Delta \arg f(z)$ die Änderung von $\arg f(z)$ bezeichnet wird. N ist die Anzahl der Nullstellen z_n und P die Anzahl der Polstellen z_p von $f(z)$, die in dem von C umschlossenen Gebiet liegen.

Beweis: siehe Parks und Hahn (1981), Seite 7.

Literatur

- Achieser, N. L. und I. M. Glasmann (1968). *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. Akademie-Verlag, Berlin.
- Amin, A. und B. F. Womack (1985). Stability analysis and robustness of a class of large-scale systems with decentralized adaptive controllers. *24th IEEE Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, USA, 1, S. 112-113.
- Andreiev, N. (1981). A new dimension: A self-tuning controller that continually optimises PID-constants. *Control Engineering*, **28**, No. 8, S. 84-85.
- Aström, K. J. (1983a). Analysis of Rohrs counterexamples to adaptive control. *Proceed. of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, S. 982-987.
- Aström, K. J. (1983b). Theory and applications of adaptive control - A survey. *Automatica*, **19**, No. 5, S. 471-486.
- Balas, M. J. und C. R. Johnson (1981). Adaptive identification and control of large scale or distributed parameter systems using reduced order models. *Proceed. of the 2nd Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory*, New Haven, S. 175-181.
- Bengtsson, G. und B. Egardt (1984). Experiences with self-tuning control in the process industry. *Prepr. of the 9th IFAC World Congress*, Budapest, Vol. X, S. 267-272.
- Benhammou, A. und A. Titli (1986). Decentralized identification and control of systems with unknown parameters. *Prepr. of the IFAC/IFORS Symposium on Large Scale Systems: Theory and Application*, Zürich, S. 247-251
- Bergemann, H.-J. (1985). *Identifikation des Übertragungsverhaltens eines Einschnellenextruders*. Diplomarbeit ESR-8515, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum .
- Böcker, J., I. Hartmann und Ch. Zwanzig (1986). *Nichtlineare und adaptive Regelungssysteme*, Springer - Verlag, Berlin.

- Bundell, G. A. (1985). Robust discrete decentralized model reference adaptive control. *Proceed. of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, S. 1486-1488.
- Chen, J. P. und A. Titli (1986). Decentralized control of linear interconnected systems. *Proceed. of the IMACS-IFAC Symposium on Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems*, Villeneuve D'Asco, France, S. 41-44.
- Cluett, W. R., S. L. Shah und D. G. Fisher (1986). Robust design of adaptive control systems using conic sector theory. *Prepr. of the 2nd IFAC Workshop on Adaptive systems in control and Signal Processing*, Lund, Sweden.
- Cluett, W. R., S. L. Shah und D. G. Fisher (1987). Stability analysis of discrete-time adaptive control systems based on conic sector theory: A tutorial. *IEEE Proceeding-Part D*, (zur Veröffentlichung eingereicht)
- Davison, E. J. (1978). Decentralized robust control of unknown systems using tuning regulators. *IEEE Trans. Automatic Control*, 23, No 2, S. 276-289.
- Desoer, C. A. und M. Vidyasagar (1975). *Feedback systems: Input-output properties*. Academic Press, New York.
- Dion J. und H. Lamare (1984). Direct model reference adaptive control for linear multivariable systems. *Prepr. of the 9th IFAC World Congress*, Budapest, Vol. VII, S. 87-92.
- Egardt, B. (1979). *Stability of adaptive controllers*. Springer-Verlag.
- Elliott, H. und W. A. Wolovich (1984). Parametrisation issues in multivariable adaptive control. *Automatica*, 20, S. 553-545.
- Friedlander, B. und B. Porat (1982). Adaptive design of decentralized controllers. *Proc. of the 21th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, S. 495-500.

- Gavel, D. T. und D. D. Siljak (1985a). Adaptive control of decentralized systems: Known subsystems, unknown interconnections. *Proceed. of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft Lauderdale, S. 1858-1861.
- Gavel, D. T. und D. D. Siljak (1985b). High gain adaptive decentralized control. *Proceed. of the American Control Conference*, Boston, S. 568-573.
- Gawthrop, P. J. (1980). On the stability and convergence of a self-tuning controller. *Int. J. Control*, **31**, No. 3, S. 973-998.
- Gawthrop, P. J. und K. W. Lim (1982). Robustness of self-tuning controllers. *IEE Proceed. 129D*, S. 21-29.
- Goodwin, G. C., P. J. Ramadge und P. E. Caines (1980). Discrete time multivariable adaptive control. *IEEE Trans. on Aut. Control*, **25**, S. 449-461.
- Goodwin, G. C. und K. S. Sin (1984). *Adaptive filtering, prediction and control*. Verlag Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jessay.
- Hahn, V. (1983). *Direkte adaptive Regelstrategien für die diskrete Regelung von Mehrgrößensystemen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Hahn, V. (1985). Ein neues Verfahren zum sequentiellen Entwurf von stabilen linearen Mehrgrößenregelungen im Frequenzbereich. *Automatisierungstechnik*, **33**, S. 179-183.
- Hahn, V., H. Röck, Chr. Schmid und P. Wiemer (1985). Some experiences with the application of multivariable adaptive control in chemical and electromechanical plants. *Optimal Control Applications and Methods*, **6**, Seite 225-248.
- Hamza, M. H., P. Agathoklis und W. C. Chan (1982). A combined self-tuning and integral controller for load frequency control of interconnected power systems. *Regelungstechnik*, **7**, S. 226-232.
- Hitz, L. und B. D. O. Anderson (1969). Discrete positive-real functions and their application to system stability. *Proceed. IEE*, **116**, S. 153-155.

- Hmamed, A. und L. Radouane (1982). On decentralized non-linear feedback stabilisation of interconnected systems. *Prepr. of the 3rd IFAC/IFIP Symposium on Software for Computer Control*, Madrid, S. 345-350.
- Hsu, L., M. Chan und E. Kaszkurewicz (1986). Sequential tuning of decentralized regulators: ordering algorithms and automatic tuning. *Prepr. of the IFAC/IFORS Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications*, Zürich, S. 107-112.
- Ioannou, P. (1983a). Adaptive control of interconnected systems. *Proceed. of the 3th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory*, New Haven, S. 164-167.
- Ioannou, P. (1983b). Robust redesign of adaptive control in the presence of disturbances and unmodeled dynamics. *Prepr. of the IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, San Francisco, paper PS1-4.
- Ioannou, P. und P. Kokotovic (1983a). Decentralized adaptive control in the presence of multiparameter singular perturbations and bounded disturbances. *Prepr. of the American Control Conference*, San Francisco, S. 553-558.
- Ioannou, P. und P. Kokotovic (1983b). Improvement of robustness of adaptive schemes. *Proceed. of the 3rd Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory*, S. 148-153.
- Ioannou, P. und P. Kokotovic (1984a). Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control. *Automatica*, 20, S. 583-594.
- Ioannou, P. und P. Kokotovic (1984b). Robust redesign of adaptive control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 29, S. 202-211.
- Ioannou, P. und M. De Ponte Jr. (1984). Adaptive control techniques for a class of large-scale systems. *Proceed. of the American Control Conference*, San Diego, S. 409-414.

- Ionescu, T. und R. Monopoli (1977). Discrete model reference adaptive control with an augmented error signal. *Automatica*, **13**, S. 507-517.
- Isermann, R. (1982). Parameter adaptive control algorithms - A tutorial. *Automatica*, **18**, No. 5, S. 513-528.
- Isermann, R. und H. Hensel (1985). Sequential design of decentralized controllers with identification and selftuning control methods. *Prepr. of the IFAC-Symposium on Computer Aided Design in Control and Engineering Systems*, Kopenhagen, S. 330-335.
- Kosut, R. L. und B. Friedlander (1982). Performance robustness properties of adaptive control systems. *Proceed. of the 21st IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, S.18-23.
- Kosut, R. L. und B. Friedlander, (1985). Robust adaptive control: Conditions for global stability. *IEEE Trans. on Aut. Control*, **30**, No. 7, S. 610-624.
- Kosut, R. L., C. R. Johnson, Jr. und B. D. O. Anderson (1983). Conditions for local stability and robustness of adaptive control systems. *Prepr. of the 22nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, S. 972-976.
- Kosut, R. L. und C. R. Johnson, Jr. (1984). An input-output view of robustness in adaptive control. *Automatica*, **20**, S. 569-581.
- Kofahl, R. und K. Peter (1986). Interkama '86: Adaptive Regler. *Automatisierungstechnische Praxis*, **29**, Heft 3, S. 122-131
- Krahl, F., W. Litz und F. F. Rhiel (1985). Experiments with Self-tuning Controllers in Chemical Plants. *Prepr. of the IFAC Workshop of Adaptive Control of Chemical Processes*, Frankfurt/Main, S. 138-143.
- Kreisselmeier, G. und K. S. Narendra (1982). Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances. *IEEE Trans. on Aut. Control*, **27**, No. 6, S. 1169-1175.

- Kucera, V. (1979). *Discrete linear control, the polynomial equation approach*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Landau, Y. D. (1979). *Adaptive control - The model reference approach*. Marcel Dekker, New York.
- Landau, Y. D. (1982). Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes. *Intern. Journal of Control*, **35**, S. 197-226.
- Litz, L. (1983). *Dezentrale Regelung*. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München.
- Lyou, J. und Z. Bien (1985). Decentralized adaptive stabilization of a class of large-scale discrete systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, **107**, S. 106-109.
- Narendra, K. S. und R. V. Monopoli (1980). *Applications of Adaptive Control*. Academic Press, New York.
- Ortega, R. und Y. D. Landau (1983a). On the design of robustly performing adaptive controllers for partially modelled systems. *Proceed. of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, S. 967-971.
- Ortega, R. und Y. D. Landau (1983b). On the model-process mismatch tolerance of various parameter adaptation algorithms in direct control schemes: A sectoricity approach. *Proceed. of the 2nd IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, San Francisco, paper ROB1-2.
- Ortega, R., L. Praly und Y. D. Landau (1985). Robustness of discrete time direct adaptive controllers. *IEEE Trans. on Aut. Control*, **30**, No. 12, S. 1179-1187.
- Ortega, R. und T. Yu (1987). Theoretical results on robustness of direct adaptive controllers. *Prepr. of the 10th IFAC World Congress on Automatic Control*, München, Vol. 10, S. 1-15.
- Parks, P. C. und V. Hahn (1981). *Stabilitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin.

- Peterson, B. B. und K. S. Narendra (1982). Bounded error adaptive control. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 27, No. 6, S. 1161-1168.
- Peis, M. (1988). *Entwurf einer adaptiven dezentralen Kaskadenregelung eines Extruders*. Studienarbeit ESR-8708, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum .
- Praly, L. (1983a). Robustness of model reference adaptive control. *Proceed. of the 3rd Yale Workshop on Application of Adaptive Systems Theory*, New Haven, S. 224-226.
- Praly, L. (1983b). Robustness of indirect adaptive control based on pole placement design. *Prepr. of the IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, San Francisco, paper ROB1-5.
- Praly, L. (1984). Robust model reference adaptive controllers, Part 1: Stability analysis. *Proc. of the 23rd Conference on Decision and Control*, Las Vegas, S. 1009-1014.
- Rohrs, C. E., L. Valavani, M. Athans und G. Stein (1982). Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics. *Proceed. of the 21st IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, S. 3-11.
- Safonov, M. G. (1980). *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. The M.I.T. Press.
- Safonov, M. G. und M. Athans (1981). A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 26, No. 2, S. 415-422.
- Schmid, Chr. (1979). *Ein Beitrag zur Realisierung adaptiver Regelungssysteme mit dem Prozeßrechner*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, FRG.
- Singh, M. G. (1981). *Decentralized control*. North Holland Systems and Control Series, Vol. 1.

- Singh, R. P. und K. S. Narendra (1983). Design of dynamic precompensators for the adaptive control of multivariable systems. *Proceed. of the 3rd Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory*, New Haven, S. 218-223.
- Steward, G. W. (1973). *Introduction to matrix computations*. Academic Press, New York.
- Sundareshan, M. K. (1976). A Condition for decentralization in model reference adaptive systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 21, No. 6, S. 880-881.
- Tzafestas, S. G., G. I. Stassinopoulos, M. Farsi, J. W. Finch und K. Warwick (1986). Decentralized PID-Self-Tuning Control of Industrial Robots. *Proceed. of the 25th Conference on Decision and Control*, Athen, S. 1888-1890.
- Unbehauen, H. (1985a). Theory and application of adaptive control. *Proceed of the 7th IFAC/IFIP/IMAC Conference on Digital Computer Applications to Process Control*. Wien, S. 3-19.
- Unbehauen, H. (1985b). *Regelungstechnik III - Identifikation, Adaption, Optimierung*. Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Unbehauen, H. (1985c). Stand der Theorie und Anwendung adaptiver Regelverfahren. *59. Tagung der Schweizer Gesellschaft für Automatik "Nichtlineare, adaptive und robuste Regelung"*, Zürich, S. 17-42.
- Unbehauen, H. und Chr. Schmid (1980). Application of adaptive systems in process control. In: Narendra, K.S. und Monopoli (Ed.): *Applications of Adaptive Control*. Academic Press, New York, S. 899-904.
- Unbehauen H. und P. Wiemer (1986). Application of multivariable adaptive control schemes to distillation columns. In: Narendra, K.S. (Ed.): *Adaptive and Learning Systems*. Plenum Press, New York.
- Wiemer, P. (1987). Adaptive tuning of decentralized controllers. *First International Conference on Industrial and Applied Mathematics*, Paris.

- Wiemer, P. und H. Unbehauen (1987). Decentralized adaptive control of a turbogenerator. *Proceed. of the 5th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory*, New Haven, S. 43-48.
- Willems, J. C. (1971). *The analysis of feedback systems*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wolovich, W. A. und P. L. Falb (1969). On the structure of multivariable systems. *SIAM J. Control*, 7, Nr. 3, S. 437-449.
- Yang, W. Y. und G. P. Papavarsilopoulos (1985). On a class of decentralized discrete-time adaptive control problems. *Proceed. of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, S. 99-103.
- Zames, G. (1966). On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part I and II. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 11, No. 2 and No. 3, S. 228-238, S. 465-476.

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

Signale:

Signale werden im Zeitbereich mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Das Argument t beschreibt ein kontinuierliches und das Argument k ein diskretes Signal. Im Frequenzbereich werden die Signale mit großen Buchstaben und Argument s bzw. z dargestellt. Der Index i an einem Signal gibt an, daß nur eine Komponente eines Signalvektors beschrieben wird. Die Hochzahl r kennzeichnet Signale, die zu dem Teilsystem r gehören. Signalvektoren werden zusätzlich unterstrichen.

$e_m(k)$, $E_m(z)$	Adaptionsfehler
$e_m^*(k)$, $E_m^*(z)$	Adaptionsfehler im angepaßten Zustand
$u(k)$, $U(z)$	Stellgröße, Eingangssignal der Regelstrecke
$u_I(k)$, $U_I(z)$	Inkrement der Stellgröße
$w(k)$, $W(z)$	Sollwert
$v(k)$, $V(z)$	Parameterfehler
$x(k)$, $X(z)$	Signalvektor
$x_s(k)$, $X_s(z)$	Gesamtsignalvektor
$y(k)$, $Y(z)$	Regelgröße, Ausgangssignal der Regelstrecke
$y_m(k)$, $Y_m(z)$	Ausgangssignal des Parallelmodells
$z(k)$, $Z(z)$	Störsignal
$\epsilon(k)$, $\epsilon(z)$	stochastische Störung

Polynom- und Übertragungsmatrizen:

Polynom- und Übertragungsmatrizen werden durch unterstrichene große Buchstaben mit Argument s bzw. z dargestellt. Die einzelnen Elemente der Matrizen werden nicht unterstrichen und durch zwei Indices gekennzeichnet. Der erste Index i bezeichnet die Zeile und der zweite Index j die Spalte der entsprechenden Polynom- bzw. Übertragungsmatrix. Bei Diagonalmatrizen kann auch nur ein Index verwendet werden. Die Hochzahl r kennzeichnet Polynom- und Übertragungsmatrizen, die zu dem Teilsystem r gehören.

$\underline{A}(z)$	Nennermatrix der Regelstrecke
$\underline{A}_I(z)$	Nennermatrix der um den Integrator erweiterten Regelstrecke
$\underline{A}_k(z)$	Nennermatrix des Korrektornetzwerks
$\underline{A}_m(z)$	Nennermatrix des Parallelmodells
$\underline{B}(z)$	Zählermatrix der Regelstrecke
$\underline{B}_e(z)$	Zählermatrix der erweiterten Regelstrecke
$\underline{B}_k(z)$	Zählermatrix des Korrektornetzwerks
$\underline{B}_m(z)$	Zählermatrix des Parallelmodells
$\underline{C}(z)$	Nennermatrix des geschlossenen Regelkreises
$\underline{D}_a(z), \underline{D}_h(z), \underline{D}_v(z)$	Polynommatrizen zur Beschreibung der Totzeitstruktur der Regelstrecke
$\underline{D}_m(z), \underline{D}_k(z)$	Polynommatrizen zur Beschreibung der Totzeitstruktur des Parallelmodells und des Korrektornetzwerks
$\underline{G}(z)$	Übertragungsmatrix der Regelstrecke
$\underline{G}_k(z)$	Übertragungsmatrix des Korrektornetzwerks
$\underline{G}_m(z)$	Übertragungsmatrix des Parallelmodells
$\underline{H}(z)$	KorrekturmatriX
$\underline{H}_2(z)$	Übertragungsmatrix im Rückwärtszweig des Fehlermodells
$\underline{H}_3(z), \underline{H}_4(z)$	Übertragungsmatrizen im Fehlermodell
$\underline{H}_5(z), \underline{H}_6(z), \underline{H}_7(z)$	Übertragungsmatrizen, die die Abhängigkeit des Signals $\underline{Y}(z)$ von den Signalen des Fehlermodells beschreiben
$\underline{H}_8(z), \underline{H}_9(z), \underline{H}_{10}(z)$	Übertragungsmatrizen, die die Abhängigkeit des Signals $\underline{U}(z)$ von den Signalen des Fehlermodells beschreiben
$\underline{H}_{11}(z), \underline{H}_{12}(z), \underline{H}_{13}(z)$	Übertragungsmatrizen, die die Abhängigkeit des Signals $\underline{X}_s(z)$ von den Signalen des Fehlermodells beschreiben
$\underline{P}(z)$	Reglermatrix
$\underline{P}_k(z)$	konstante Reglermatrix
$\underline{S}(z)$	Reglermatrix
$\underline{S}_k(z)$	konstante Reglermatrix
$\underline{T}(z)$	Reglermatrix

Adaptionsalgorithmen:

a	Faktor zur exponentiellen Wichtung der Signale
C	Zentrum eines Kreissektors
E	konstante Wichtungsmatrix
$E(k)$	zeitvariante Wichtungsmatrix (Kovarianzmatrix)
$f(k)$	zeitvarianter Wichtungsfaktor
f_1, f_2, f_3	konstante Adaptionsparameter
$\underline{H}_1, \underline{H}'_1, \underline{H}''_1$	Operator zur Beschreibung des Adaptionsgesetzes
K	Sektorgrenze
$\hat{p}(k)$	Reglerparametervektor
$\tilde{p}(k)$	Parameterfehlervektor
R	Radius eines Kreissektors
$R(k)$	Transformationsmatrix
$r(k)$	Signalwichtungsparameter
r_1, r_2, r_3	konstante Adaptionsparameter
$V(k)$	Ljapunowfunktion
γ_0	Konstante

sonstige Formelzeichen:

r	Anzahl der dezentralen Einzelregelkreise
q	Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge der Regelstrecke
T	Abtastzeit

Symbole und Abkürzungen:

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$	Raum der reellen bzw. ganzen Zahlen
R^n, L_p^n, L_{pe}^n	spezielle lineare Räume
$\ \cdot\ $	vektorielle Norm
$ \cdot $	Betrag einer reellen Zahl
$\cdot^*$	konjugiert komplexer Wert
$D(f,g)$	Abstand zweier Elemente eines linearen Vektorraumes
$\langle f,g \rangle$	Skalarprodukt zweier Elemente eines linearen Vektorraumes
$\max g_i$	Maximum aller reellen Zahlen g_i
$\lambda_i(\underline{A}), \lambda_{\max}(\underline{A})$	(maximaler) Eigenwert einer Matrix $\underline{A}$

$\sigma_i(\underline{A})$, $\sigma_{\max}(\underline{A})$	(maximaler) singulärer Wert einer Matrix <u>A</u>
$\det \{ \underline{A} \}$	Determinante der Matrix <u>A</u>
$\underline{A}^T$	Transponierte der Matrix <u>A</u>
$\underline{A}^{-1}$	Inverse der Matrix <u>A</u>
$\underline{A} > \underline{0}$	positiv definite Matrix <u>A</u>
$\text{diag} \{ \underline{A} \}$, $i=1,...,N$	Diagonalmatrix aus N Hauptdiagonalblöcken
$\underline{A} = \{ a_{ij} \}$, $i,j=1,...,N$	vollbesetzte Matrix mit den Elementen a_{ij} in der Zeile i und der Spalte j
$S(\underline{A}, \underline{B})$	allgemeiner Sektor mit den Grenzen <u>A</u> und <u>B</u>
$K(\underline{C}, \underline{R})$	Kreis Sektor mit dem Zentrum <u>C</u> und dem Radius <u>R</u>
$\hat{}$	Schätzwert

Lebenslauf

Name:	Peter Wiemer
Geburtstag:	9. September 1956
Geburtsort:	Oelde
Familienstand:	verheiratet, 1 Kind
Schulbildung:	
1963 - 1965	Augustin - Wibbelt - Grundschule, Oelde
1965 - 1966	von - Kettler - Grundschule, Oelde
1966 - 1975	Thomas - Morus - Gymnasium, Oelde
9. Juni 1975	Abitur
1975 - 1976	Wehrdienst
Berufsausbildung:	
1976 - 1982	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr - Universität Bochum.
3. November 1982	Diplom - Hauptprüfung
seit dem 1.März 1983	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung von Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen an der Ruhr - Universität in Bochum.

